Titre: Title:	Problèmes extrémaux pour les polynômes algébriques
Auteur: Author:	Mohammed A. Qazi
Date:	1996
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Qazi, M. A. (1996). Problèmes extrémaux pour les polynômes algébriques [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/8936/

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/8936/
Directeurs de recherche: Advisors:	
Programme: Program:	Non spécifié

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PROBLÈMES EXTRÉMAUX POUR LES POLYNÔMES ALGÉBRIQUES

MOHAMMED A. QAZI
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L' OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(MATHÉMATIQUES DE L' INGÉNIEUR)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
JUILLET 1996

0-612-26433-5

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée

PROBLÈMES EXTRÉMAUX POUR LES
POLYNÔMES ALGÉBRIQUES

présentée par: QAZI Mohammed A.
en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. DESLAURIERS Gilles, Ph.D., président
M. FRAPPIER Clément, Ph.D., directeur de recherche
M. GIROUX André, Ph.D., membre
M. RIVLIN Theodore J., Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Ce travail a été fait sous la direction du Professeur Clément Frappier. Il mérite mes sincères remerciements pour m'avoir guidé si patiemment tout au long de ma scolarité. La bourse qu'il m'a offerte m'a été très précieuse et je lui en suis gré.

RÉSUMÉ

Soit $\mathcal{P}_n$ la classe de tous les polynômes de degré au plus n. Il est bien connu que si $||P|| := \max_{|z|=1} |P(z)|$ et $M_P(R) := max_{|z|=R}|P(z)|$ alors pour un polynôme quelconque $P(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ dans $\mathcal{P}_n$ nous avons

$$||P'|| \leq n||P|| \tag{1}$$

et

$$M_P(R) \leq R^n||P||, \quad R \geq 1. \tag{2}$$

L'égalité a lieu dans (1) et (2) si et seulement si $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

Nous obtenons tout d'abord des inégalités optimales de la forme $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k |a_k| < 1$ où $P \in \mathcal{P}_n$ avec $||P|| = 1$. En guise d'application nous obtenons un raffinement de l'inégalité (1).

Etant donnés n, k $(0 \leq k \leq n-1)$ soient $c_{1,k}(n)$ et $d_{n,k}(R)$ les plus grands nombres possibles tels que $||P'||+c_{1,k}(n)|a_k| \leq n||P||$ et $M_P(R)+d_{n,k}(R)|a_k| \leq R^n||P||$, $R \geq 1$, pour tout $P \in \mathcal{P}_n$. Les valeurs de $c_{1,k}(n)$ pour $k = 0, 1, 2$ et de $d_{n,k}(R)$ pour $k = 0$ et 1 sont connues depuis quelque temps. Nous étudions ces constantes pour les autres valeurs de $k \in \mathbb{N}$.

Il a été démontré par T.J. Rivlin que si $P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ et $P(z) \neq 0$ dans $|z| < 1$ alors $M_P(r)/M_P(1) \geq \left(\frac{1+r}{2}\right)^n$ pour $0 \leq r < 1$. Nous pouvons en dire plus si a_1/a_0 est prescrit. Des estimations précises sont connues lorsque le degré n du polynôme est pair. Ici nous considérons le cas $n = 3$ et nous obtenons la borne précise pour $M_P(r)/M_P(R)$, $(0 < r, R \leq 1)$, lorsque a_1 est zéro. La forme de la réponse suggère que le problème est très difficile pour n impair, $n \geq 5$.

ABSTRACT

Let $\mathcal{P}_n$ be the class of all polynomials of degree at most n. If $||\cdot||$ denotes the supremum norm on $|z| = 1$ and $M_P(R) := \max_{|z|=R}|P(z)|$ then for an arbitrary polynomial $P(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ in $\mathcal{P}_n$ hold the inequalities

$$||P'|| \leq n||P|| \tag{1}$$

and

$$M_P(R) \leq R^n||P||, \quad R \geq 1, \tag{2}$$

with equality in both (1) and (2) if and only if $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

We first obtain optimal inequalities of the form $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k|a_k| < 1$ where $P \in \mathcal{P}_n$ such that $||P|| = 1$. As an application, we give a refinement of inequality (1).

Given n, k $(0 \leq k \leq n-1)$ let $c_{1,k}(n)$ and $d_{n,k}(R)$ be the largest possible numbers such that $||P'|| + c_{1,k}(n)|a_k| \leq n||P||$ and $M_P(R) + d_{n,k}(R)|a_k| \leq R^n||P||$, $R \geq 1$, for all $P \in \mathcal{P}_n$. Values of $c_{1,k}(n)$ for $k = 0, 1, 2$ and of $d_{n,k}(R)$ for $k = 0$ et 1 are known since some time. We study these constants for the other values of $k \in \mathbb{N}$.

It was shown by T.J. Rivlin that if $P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ and $P(z) \neq 0$ in $|z| < 1$ then $M_P(r)/M_P(1) \geq \left(\frac{1+r}{2}\right)^n$ for $0 \leq r < 1$. One can say more if a_1/a_0 is prescribed. Sharp estimates are known when the degree n of the polynomial is even. Here we consider the case $n = 3$ and obtain the sharp lower bound for $M_P(r)/M_P(R)$, $(0 < r, R \leq 1)$, when a_1 is zero. The form of the answer suggests that the problem is very difficult for odd $n \geq 5$.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Notons $\mathcal{P}_n$ la classe des polynômes $P(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ de degré au plus n. Ecrivons

$$||P|| := \max_{|z|=1} |P(z)|$$

et

$$M_P(R) := \max_{|z|=R} |P(z)|.$$

Plusieurs inégalités reliant $||P'||$, $M_P(R)$ et les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$, à $||P||$ sont connues. Parmi elles, une inégalité classique de Van der Corput et Visser [2] s'énonce

$$2|a_0||a_n| + \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \le ||P||^2, \quad P \in \mathcal{P}_n, \tag{0.1}$$

ce qui implique [20]

$$|a_0| + |a_n| \le ||P||. \tag{0.2}$$

L'inégalité

$$|a_0| + \frac{1}{2}|a_k| \le ||f||, \quad k \ge 1 \tag{0.3}$$

suit de l'inégalité plus générale [14, Exercice 9, p 172]

$$|a_0|^2 + |a_k| \le 1, \quad k \ge 1 \tag{0.4}$$

où $f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ est holomorphe dans $|z| \le 1$ et $|f(z)| \le 1$ dans ce disque. Il est connu que le coefficient de $|a_k|$ apparaissant dans (0.3) ne peut pas être remplacé par un nombre plus grand. Le coefficient $1/2$ dans l'inégalité [8, p.94]

$$|a_0| + \frac{1}{2}(|a_k| + |a_l|) \le ||P||, \quad P \in \mathcal{P}_n \tag{0.5}$$

où $1 \le k \le l, l \ge n+1-k$ est à fortiori meilleur possible. Cependant une amélioration résulte dans (0.3) si nous tenons compte du degré de P. A ce sujet mentionnons un résultat de Holland [13]: si $P(z) = 1 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$ est un polynôme de degré $\le n$ tel que $Re P(z) > 0$ pour $|z| < 1$ alors

$$|b_k| \le 2cos\left(\frac{\pi}{\nu+2}\right) \tag{0.6}$$

où ν est le plus grand entier $\leq n/k$. L'égalité dans (0.6) est possible. Maintenant, appliquant (0.6) au polynôme $p(z) = \{||P|| - P(z)\}\{||P|| - a_0\}^{-1}$ où, sans perte de généralité, nous supposons a_0 positif, nous obtenons

$$|a_0| + \left[2cos\left(\frac{\pi}{\nu+2}\right)\right]^{-1} |a_k| \leq ||P||, \quad k \geq 1 \tag{0.7}$$

ce qui est une amélioration de (0.2) et (0.3). Les inégalités précédentes nous amènent à considérer le problème plus général d'établir une inégalité de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu |a_\nu| \leq ||P||, \quad P \in \mathcal{P}_n. \tag{0.8}$$

Plus précisément, nous trouvons au chapitre 1, pour des polynômes $P(z)$ où $|P(z)| \leq 1$ pour $|z| \leq 1$ et $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, le domaine de variabilité des composantes λ_ν ($1 \leq \nu \leq n$) telles que

$$|a_0| + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu |a_\nu| \leq ||P||, \quad P \in \mathcal{P}_n. \tag{0.8$'$}$$

Si $P \in \mathcal{P}_n$ alors selon un résultat bien connu de S. Bernstein [1],

$$||P'|| \leq n||P||. \tag{0.9}$$

L'inégalité [17]

$$M_P(R) \leq R^n ||P||, \quad R \geq 1, \tag{0.10}$$

est due à Riesz et est aussi bien connue. Dans (0.9) et (0.10) l'égalité a lieu si et seulement si $P(z) = a_n z^n$, i.e. si et seulement si les coefficients a_ν, $\nu = 0, \ldots, n-1$, sont zéros. Etant donnés $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n-1$, soient $c_{1,k}(n)$ et $d_{n,k}(R)$ les meilleures constantes possibles telles que

$$||P'|| + c_{1,k}(n)|a_k| \leq n||P|| \tag{0.11}$$

et

$$M_P(R) + d_{n,k}(R)|a_k| \leq R^n ||P||, \quad R \geq 1 \tag{0.12}$$

pour tout $P \in \mathcal{P}_n$.

REMARQUE. Dans (0.11) (et de façon analogue pour (0.12)) dire que $c_{1,k}(n)$ est la meilleure constante possible signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $P_\epsilon \in \mathcal{P}_n$, $P_\epsilon(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(\epsilon) z^\nu$, tel que $||P_\epsilon'|| + (c_{1,k}(n) + \epsilon)\,|a_k(\epsilon)| > n||P_\epsilon||$.

Les constantes $c_{1,0}(n), c_{1,1}(n), c_{1,2}(n)$ sont connues. En effet [8, Corollaire 1]

$$c_{1,0}(1) = 1, \quad c_{1,0}(n) = \frac{2n}{n+2} \quad pour \quad n \geq 2.$$

Selon un résultat apparaissant dans [8], $c_{1,1}(1) = 0$ $c_{1,1}(2) = \sqrt{2} - 1$, $c_{1,1}(3) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour $n \geq 4$, $c_{1,1}(n) = \frac{2n}{n+4}\left(\sqrt{\frac{2(n+2)}{n}} - 1\right)$ est l'unique racine de l'équation

$$16n - 8(3n+2)x^2 - 16x^3 + (n+4)x^4 = 0$$

dans (0, 1). De plus, d'après un résultat qui se trouve dans [7], la constante $c_{1,2}(n)$, pour $n \geq 6$, est l'unique racine de l'équation

$$64n - 64(3n+1)x^2 - 16x^3 + 16(5n+7)x^4 - 40x^5 - (n+6)x^6 = 0$$

dans (0,1). Maintenant, que peut-on dire au sujet de $c_{1,k}(n)$ si $k \geq 3$? Nous consacrons le chapitre 2 à l'étude de ce problème et à d'autres problèmes connexes.

En ce qui concerne $d_{n,k}(R)$, les valeurs de $d_{n,0}(R)$ et de $d_{n,1}(R)$ sont connues depuis quelque temps. En effet nous avons, pour tout $R \geq 1$ [8],

$$d_{n,0}(R) = (R^n - R^{n-2}) \quad si \quad n \geq 2.$$

Quant à $d_{n,1}(R)$,

$d_{1,1}(R) = 0$, $d_{2,1}(R) = R(\sqrt{(R^2+1)/2} - 1)$, $d_{3,1}(R) = (R^2 - R)(\sqrt{R^2 + R + 1} - 1)$

et si $n \geq 4$,

$$d_{n,1}(R) = (R^n - R^{n-2})\left(\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}} - \frac{1}{R}\right).$$

Dans la section 3.1 du chapitre 3 nous étudierons le cas $k \geq 2$.

Une méthode, dite de convolution, sera utilisée afin d'étudier les constantes $c_{1,k}(n)$, $k \geq 3$ et $d_{n,k}(R)$, $k \geq 2$ ainsi que pour établir l'inégalité (0.8'). Cette méthode de convolution permet de ramener le calcul de certaines valeurs optimales à celui de la détermination du signe de matrices hermitiennes.

Soient $P \in \mathcal{P}_n$ et $0 < r < 1$. En appliquant (0.10) au polynôme $f(z) := P(rz)$ avec $R = 1/r$ nous obtenons

$$M_P(1) = M_f\left(\frac{1}{r}\right) \leq \left(\frac{1}{r}\right)^n M_f(1) = \left(\frac{1}{r}\right)^n M_P(r).$$

i.e.

$$M_P(r) \geq r^n M_P(1) \quad pour \quad 0 < r < 1. \tag{0.13}$$

Dans (0.13) l'égalité a lieu si et seulement si $P(z) = cz^n$ où $c \in \mathbb{C}$. Ceci suggère que l'inégalité (0.13) peut être améliorée si $P(z)$ ne s'annule pas dans $|z| < 1$. En effet, Rivlin [18] a démontré le

THEOREME A. *Soit $P \in \mathcal{P}_n$. Si $P(z) \neq 0$ dans $|z| < 1$ alors*

$$M_P(r) \geq \left(\frac{1+r}{2}\right)^n M_P(1) \quad pour \quad 0 < r < 1. \tag{0.14}$$

L'inégalité (0.14) est la meilleure possible: l'égalité a lieu pour des polynômes de la forme $(\lambda + \mu z)^n$, $|\lambda| = |\mu|$.

Des généralisations du théorème A ont été considérées par Govil dans [11]. Après avoir remarqué que (0.14) peut être remplacé par l'inégalité quelque peu plus générale

$$M_P(r) \geq \left(\frac{1+r}{1+R}\right)^n M_P(R) \quad pour \quad 0 \leq r < R \leq 1 \tag{0.15}$$

il a démontré le

THEOREME B. *Soient $P \in \mathcal{P}_n$ et $P(z) \neq 0$ pour $|z| < 1$. Si $P'(0) = 0$, alors pour* $0 \leq r < R \leq 1$ *nous avons*

$$M_P(r) \geq \left(\frac{1+r}{1+R}\right)^n \left\{\frac{1}{1 - \frac{(1-R)(R-r)n}{4}\left(\frac{1+r}{1+R}\right)^{n-1}}\right\} M_P(R). \tag{0.16}$$

Alors que (0.15) est précise, l'inégalité (0.16) laisse à désirer. Nous avons réussi [15] à la remplacer par

$$M_P(r) \geq \left(\frac{1+r^2}{1+R^2}\right)^{n/2} M_P(R) \quad pour \;\; 0 \leq r < R \leq 1. \tag{0.17}$$

Cette inégalité est précise pour n pair comme nous pouvons le voir en considérant des polynômes de la forme $(\lambda + \mu z^2)^{n/2}$, $|\lambda| = |\mu|$. En effet, nous avons le résultat plus général suivant:

THEOREME C [15, Corollaire 1]. *Si $P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ n'a pas de zéros dans $|z| < 1$, alors pour* $0 \leq r < R \leq 1$ nous avons

$$M_P(r) \geq \left(\frac{1 + 2|\lambda| r + r^2}{1 + 2|\lambda| R + R^2}\right)^{n/2} M_P(R). \tag{0.18}$$

où $\lambda := \frac{a_1}{n a_0}$.

De l'inégalité (0.18) qui est précise pour n pair, nous pouvons facilement déduire que si P appartenant à $\mathcal{P}_n$ a tous ses zéros sur $[-1, 1]$, alors pour tout $R > 1$,

$$\max_{z \in \mathcal{E}_R} |P(z)| \geq \left(\frac{R^{1/2} + R^{-1/2}}{2}\right)^{2n} \max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$$

où $\mathcal{E}_R$ est l'ellipse dont les foyers sont -1, $+1$ et dont la somme des demi-axes est R.

Quelqu'un qui s'interroge quant à la valeur de la condition "$P'(0) = 0$" apparaissant dans l'énoncé du théorème B trouvera ([21], en particulier §6, [22], [16]) persuasif. Nous aimerions ajouter que si $P(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ satisfait les conditions du théorème A alors $F(z) := P(z^2)$ appartient à $\mathcal{P}_{2n}$ et satisfait les deux autres conditions du théorème B. Donc en vertu de (0.17), si $0 \leq r < R \leq 1$ alors

$$M_P(r) = M_F(\sqrt{r}) \geq \left(\frac{1+r}{1+R}\right)^n M_F(\sqrt{R}) = \left(\frac{1+r}{1+R}\right)^n M_P(R)$$

i.e. que (0.15) peut être vu comme un corollaire de (0.17).

Il est naturel de chercher la version précise de (0.18) pour des polynômes de degré impair. Cependant, le problème semble être très difficile. Nous n'avons pas la réponse exacte, même dans le cas $n = 3$, mais nous aurons quelque chose de non-trivial à dire à ce sujet dans la partie 3.2 du chapitre 3. En utilisant un raisonnement variationnel nous obtiendrons la version précise du théorème C pour des polynômes de degré 3 tels que $a_1 = 0$.

CHAPITRE 1

INEGALITÉS OPTIMALES POUR LES COEFFICIENTS D'UN POLYNÔME

1.1 Enoncés des résultats

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la forme que prennent les inégalités (0.2), (0.3), (0.4) et (0.5) nous motive à étudier le problème qui est de trouver, pour des polynômes $P \in \mathcal{P}_n$ tels que $|P(z)| \leq 1$ pour $|z| \leq 1$, une inégalité de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu |a_\nu| \leq ||P||. \tag{1.1}$$

Ici nous résolvons entièrement ce problème pour des polynômes de degré ≤ 4. A titre d'application nous donnons un raffinement de l'inégalité classique (0.9).

REMARQUE 1.1 Si nous appliquons (1.1) au polynôme $z^n P(1/z) \in \mathcal{P}_n$ nous obtenons l'inégalité

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_{n-k} |a_\nu| \leq ||P||, \quad P \in \mathcal{P}_n.$$

Le cas $n = 1$ est trivial puisque

$$|a_0| + |a_1| = ||P||.$$

Pour des polynômes de degré 2, 3 et 4 nous allons démontrer les résultats suivants, qui contiennent tous comme cas particuliers les inégalités (0.5) et (0.7).

THEOREME 1.1 [6] *Si* $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ *alors*

$$|a_0| + x_1|a_1| + x_2|a_2| \leq ||P||, \tag{1.2}$$

où

$$0 \le x_1 \le 1/\sqrt{2}$$

et

$$0 \le x_2 \le 1 - 2x_1^2.$$

Pour x_1 fixé, la valeur

$$x_2 = 1 - 2x_1^2$$

est la meilleure possible.

REMARQUE 1.2 Dans l'énoncé du théorème 1.1 et de façon analogue dans ceux des théorèmes 1.2 et 1.3 qui suivent, nous entendons par "meilleure possible" que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P_\epsilon(z) = a_0(\epsilon) + a_1(\epsilon)z + a_2(\epsilon)z^2$ tel que

$$|a_0(\epsilon)| + x_1|a_1(\epsilon)| + (1 - 2{x_1}^2 + \epsilon)|a_2(\epsilon)| > ||P_\epsilon||.$$

THEOREME 1.2 [6] *Si $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3$ alors*

$$|a_0| + x_1|a_1| + x_2|a_2| + x_3|a_3| \le ||P||, \tag{1.3}$$

où

$$0 \le x_1 \le \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$
$$0 \le x_2 \le \sqrt{1-x_1} - x_1$$

et

$$0 \le x_3 \le (1 - x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2)(1 - x_1)^{-1}.$$

Pour x_1 et *x_2 fixés la valeur*

$$x_3 = (1 - x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2)(1 - x_1)^{-1}$$

est la meilleure possible.

THEOREME 1.3 [6] *Si* $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$ *alors*

$$|a_0| + x_1|a_1| + x_2|a_2| + x_3|a_3| + x_4|a_4| \leq ||P||. \tag{1.4}$$

où

$$0 \leq x_1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$0 \leq x_2 \leq \xi$$
$$0 \leq x_3 \leq \sqrt{1 - 2x_1^2 - x_2 - 2x_2^2 + 2x_2^3 + 4x_1^2 x_2^2} - x_1 - 2x_1 x_2.$$

et

$$0 \leq x_4 \leq (2x_2^3 - 2x_2^2 - x_2 - 4x_1^2 x_2 - 4x_1 x_2 x_3 - 3x_1^2 - 2x_1 x_3 - x_3^2 + 1)(1 - 2x_1^2 - x_2)^{-1}.$$

La valeur ξ *est la plus petite racine positive de l'équation*

$$2x^3 - 2x^2 - (1 + 4x_1^2)x + (1 - 3x_1^2) = 0.$$

Pour x_1, x_2 et x_3 *fixés la valeur*

$$x_4 = (2x_2^3 - 2x_2^2 - x_2 - 4x_1^2 x_2 - 4x_1 x_2 x_3 - 3x_1^2 - 2x_1 x_3 - x_3^2 + 1)(1 - 2x_1^2 - x_2)^{-1}$$

est la meilleure possible.

Passons maintenant à la présentation des détails d'une méthode de preuve dite de convolution. Celle-ci a déjà été utilisée avec succès afin d'établir surtout des inégalités de la forme (0.11) et (0.12). Nous l'utiliserons plusieurs fois dans ce chapitre ainsi que dans ceux qui suivront.

1.2 La méthode de convolution

Etant donné deux fonctions holomorphes

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \quad g(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu \quad (|z| < K)$$

la fonction

$$(f * g)(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu \quad (|z| < K)$$

est appelée produit d'Hadamard (convolution).

Soit $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des polynômes g dans $\mathcal{P}_n$ ayant la proprieté que

$$||f * g|| \le ||f|| \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{P}_n.$$

A chaque $f \in \mathcal{P}_n$ nous associons un polynôme $\tilde{f}$ défini par

$$\tilde{f}(z) := z^n \overline{f(1/\bar{z})}.$$

Si $g \in \mathcal{B}_n$ alors $||f * g|| \le ||f||$ pour tout $f \in \mathcal{P}_n$ et donc $||\tilde{f} * g|| \le ||\tilde{f}|| = ||f||$ pour tout $f \in \mathcal{P}_n$, qui à son tour implique $||f * \tilde{g}|| \le ||f||$ pour tout $f \in \mathcal{P}_n$, i.e., $\tilde{g} \in \mathcal{B}_n$. Donc

$$g \in \mathcal{B}_n \Longleftrightarrow \tilde{g} \in \mathcal{B}_n. \tag{1.5}$$

Si $f \in \mathcal{P}_n$ alors $n^{-1}f'(z) = (f * g_{\dagger})(z)$ où $g_{\dagger}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\nu}{n} z^\nu$ et $R^{-n}f(Rz) = (f * g_R)(z)$ où $g_R := \sum_{\nu=0}^{n} R^{\nu-n} z^\nu$. Donc pour démontrer (0.9) nous sommes amenés à vérifier que $g_{\dagger} \in \mathcal{B}_n$, i.e. $\tilde{g_{\dagger}} \in \mathcal{B}_n$. De même, afin d'établir (0.10) il suffirait de montrer que $g_R \in \mathcal{B}_n$ pour tout $R \ge 1$. Il est donc important d'être capable de vérifier si un polynôme g dans $\mathcal{P}_n$ appartient à $\mathcal{B}_n$. Il y a un procédé bien précis pour le faire dans le cas où $g(0) \ne 0$ ou (en vertu de (1.5)) si $\tilde{g}(0) \ne 0$. Pour la présentation du procédé il convient d'introduire la classe $\mathcal{B}_n^0$ des polynômes Q dans $\mathcal{B}_n$ pour lesquels $Q(0) = 1$. Nous avons la caractérisation suivante des polynômes dans $\mathcal{B}_n^0$ [19]:

LEMME A. *Le polynôme* $Q(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$, *où* $a_0 = 1$, *appartient à* $\mathcal{B}_n^0$ *si et seulement si la matrice*

$$M(a_0, a_1, \ldots, a_n) := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \bar{a}_1 & a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ . & . & & . \\ \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

est semi-définie positive.

Afin de déterminer si la matrice $M(1, a_1, \ldots, a_n)$ associée au polynôme $Q(z) := 1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z^\nu$ est définie positive ou non, nous utiliserons le résultat suivant [10, vol.1, p 337], d'algèbre linéaire:

LEMME B. *La matrice hermitienne*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \overline{a}_{ji}$$

est définie positive si et seulement si les mineurs principaux correspondant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

sont tous positifs.

Avant de passer à la démonstration des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 nous allons d'abord voir comment appliquer le Lemme A afin d'obtenir une démonstration indépendante de (0.7). Nous supposons, sans perdre la généralité, que $k = 1$ car nous obtenons le cas général en considérant le polynôme

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} P(z\omega^{j-1}) = a_0 + a_k z^k + \cdots + a_{k_\nu} z^{k\nu}, \quad \omega = exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right).$$

En vertu du lemme A nous devons démontrer que l'inégalité

$$||a_0 + b_1 a_1 z|| = ||P(z) * (1 + b_1 z)|| \leq ||P||$$

est satisfaite pour tout $P \in \mathcal{P}_n$ si $|b_1| \leq \left(2cos\frac{\pi}{n+2}\right)^{-1}$ et qu'il existe b_1^* où $|b_1^*| > \left(2cos\frac{\pi}{n+2}\right)^{-1}$ tel que $1 + b_1^* z \notin \mathcal{B}_n^0$. A cette fin nous devons trouver les valeurs de b_1

pour lesquelles la matrice $M(1, b_1, 0, \ldots, 0)$ est définie positive. Développant le mineur principal d'ordre r

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \bar{b}_1 & 1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{b}_1 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

par sa première ligne nous voyons aisément qu'il satisfait la relation de récurrence $D_1 = 1$, $D_2 = 1 - |b_1|^2$ et

$$D_r = D_{r-1} - |b_1|^2 D_{r-2} \quad si \;\; 3 \leq r \leq n+1,$$

dont la solution générale est

$$D_r = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4|b_1|^2}}{2} \right)^r + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4|b_1|^2}}{2} \right)^r .$$

Calculant c_1 et c_2 telles que

$$\begin{aligned} c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4|b_1|^2}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4|b_1|^2}}{2} \right) &= 1 \\ c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4|b_1|^2}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4|b_1|^2}}{2} \right) &= 1 - |b_1|^2 \end{aligned}$$

nous obtenons

$$D_r = \frac{1}{\sqrt{1 - 4|b_1|^2}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4|b_1|^2}}{2} \right)^{r+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4|b_1|^2}}{2} \right)^{r+1} \right\}$$

si $1 \leq r \leq n+1$. Soit $D_r := h(|b_1|)$. Maintenant, $h(u) = 0$ si et seulement si

$$\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4u^2}}{1 - \sqrt{1 - 4u^2}} \right)^{r+1} = 1$$

i.e. si et seulement si

$$\frac{1+\sqrt{1-4u^2}}{1-\sqrt{1-4u^2}} = e^{\frac{2j\pi i}{r+1}} \qquad (1 \le j \le r)$$

ou encore

$$\sqrt{1-4u^2} = \left(e^{\frac{2j\pi i}{r+1}} - 1\right) / \left(e^{\frac{2j\pi i}{r+1}} + 1\right) \qquad (1 \le j \le r).$$

Donc,

$$\sqrt{1-4u^2} = i tan \frac{j\pi}{r+1} \qquad (1 \le j \le r)$$

i.e.

$$u^2 = \left(4cos^2 \frac{j\pi}{r+1}\right)^{-1} \qquad (1 \le j \le r). \tag{1.7}$$

Donc les mineurs principaux D_r, $1 \le r \le n+1$, sont tous positifs si $|b_1| < \left(2cos\frac{\pi}{r+1}\right)^{-1}$. Puisque $cos\frac{\pi}{r+1} \le cos\frac{\pi}{n+2}$ pour $1 \le r \le n+1$ alors $1 + b_1 z \in \mathcal{B}_n^0$ si $|b_1| < \left(2cos\frac{\pi}{n+2}\right)^{-1}$. De plus, il est clair qu'il existe b_1^* où $|b_1^*| > \left(2cos\frac{\pi}{n+2}\right)^{-1}$ tel que $D_r < 0$, ce qui implique $1 + b_1^* z \notin \mathcal{B}_n^0$.

1.3 Démonstration des théorèmes

Un fait intéressant à constater dans les preuves ci-dessous est que les valeurs optimales de x_1, x_2, x_3 *et* x_4 sont obtenues (pour $n = 1,2,3,4$) en évaluant le mineur principal d'ordre $n+1$ i.e. $dét(M(1, b_1, \ldots, b_n))$.

Démonstration du théorème 1.1. En vertu des lemmes A et B nous étudions le signe de la matrice $M(1, b_1, b_2)$ dont les trois mineurs principaux sont

$$1, \quad 1 - |b_1|^2 \quad et \quad 1 - 2|b_1|^2 - |b_2|^2 + 2Re(b_1^2 \bar{b}_2).$$

Le premier mineur est évidemment positif et le second l'est aussi si $|b_1| < 1$. Le dernier mineur est certainement positif si

$$1 - 2|b_1|^2 - |b_2|^2 - 2|b_1|^2|b_2| = (1 + |b_2|)(1 - |b_2| - 2|b_1|^2) > 0.$$

i.e. si $|b_2| < 1 - 2|b_1|^2$, avec $1 - 2|b_1|^2 > 0$. De plus, étant donné b_1^* avec $|b_1^*| < 1/\sqrt{2}$ nous pouvons trouver un b_2^* avec $|b_2^*| > 1-2|b_1^*|^2$ tel que $1-2|b_1^*|^2-|b_2^*|^2+Re((b_1^*)^2\overline{b_2^*}) < 0$ et donc $1 + b_1^* z + b_2^* z^2 \notin \mathcal{B}_2^0$. Ainsi,

$$||P(z) * (1 + b_1 z + b_2 z^2)|| = ||a_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2|| \leq ||P||$$

si $|b_2| \leq 1 - 2|b_1|^2$, avec $|b_1| \leq 1/\sqrt{2}$ et la valeur $1 - 2|b_1|^2$ est optimale pour un b_1 donné, où $|b_1| \leq 1/\sqrt{2}$.

■

Voici maintenant la

Démonstration du théorème 1.2. Nous étudions le signe de la matrice $M(1, b_1, b_2, b_3)$. Ses mineurs d'ordre 1, 2 et 3 sont les mêmes que ceux de $M(1, b_1, b_2)$ et nous avons déjà étudié leurs signes lors de la preuve du théorème 1.1. La valeur du mineur d'ordre 4 est égal à

$$\begin{aligned} d\acute{e}t(M(1, b_1, b_2, b_3)) &= 1 - 3|b_1|^2 + |b_1|^4 - 2Re(b_1^3\overline{b}_3) \\ &\quad -2|b_2|^2 + 4Re(b_1^2\overline{b}_2) + 4Re(b_1 b_2 \overline{b}_3) + |b_2|^4 \\ &\quad -2|b_1|^2|b_2|^2 - 2Re(b_1 \overline{b}_2^{\,2} b_3) - |b_3|^2 + |b_1|^2|b_3|^2. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Comme fonction de *arg* b_1, *arg* b_2, *arg* b_3, l'expression (1.8) est minimale pour *arg* $b_1 = 0$, *arg* $b_2 = \pi$, *arg* $b_3 = 0$. Donc (1.8) est certainement positif si

$$\begin{aligned} & 1 - 3|b_1|^2 + |b_1|^4 - 2|b_1|^3|b_3| - 2|b_2|^2 - 4|b_1|^2|b_2| - 4|b_1||b_2||b_3| + |b_2|^4 \\ - & \ 2|b_1|^2|b_2|^2 - 2|b_1||b_2|^2|b_3| - |b_3|^2 + |b_1|^2|b_3|^2 > 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Le membre de gauche de (1.9) est une fonction quadratique de $|b_3|$ dont le discriminant est $4(1 - 2|b_1|^2 - |b_2|^2 - 2|b_1|^2|b_2|)^2$. Grâce à cette observation nous voyons que $d\acute{e}t(M(1, b_1, b_2, b_3)) > 0$ si

$$|b_3| < (1 - |b_1|^2 - |b_2|^2 - |b_1| - 2|b_1||b_2|)(1 - |b_1|)^{-1}.$$

avec

$$1 - |b_1|^2 - |b_2|^2 - |b_1| - 2|b_1||b_2| > 0.$$

Donc

$$|b_2| < \sqrt{1 - |b_1|} - |b_1|$$

avec

$$\sqrt{1 - |b_1|} - |b_1| > 0.$$

i.e.

$$|b_1| < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Maintenant remarquons que $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{1 - |b_1|} - |b_1| \leq 1 - 2|b_1|^2$ pour $|b_1| \leq \sqrt{3}/2$. Se référant à la preuve du théorème 1.1 ceci signifie que les conditions sur $|b_1|$ et $|b_2|$ sont moins restrictives si nous examinons le signe des mineurs principaux d'ordre 2 et 3. Il reste à démontrer que la valeur

$$(1 - |b_1|^2 - |b_2|^2 - |b_1| - 2|b_1||b_2|)(1 - |b_1|)^{-1}$$

est la meilleure possible pour n'importe quels b_1 et b_2 appartenant aux intervalles précisés. Mais notre raisonnement montre clairement qu'il existe b_3^* tel que

$$|b_3^*| > (1 - |b_1^*|^2 - |b_2^*|^2 - |b_1^*| - 2|b_1^*||b_2^*|)(1 - |b_1^*|)^{-1}.$$

i.e. que le polynôme $1 + b_1^* z + b_2^* z^2 + b_3^* z^3 \notin \mathcal{B}_3^0$.

■

Nous passons à la

Démonstration du théorème 1.3. Se référant à la méthode de preuve présentée dans la section 1.2 nous sommes amenés à étudier le signe de la matrice $M(1, b_1, b_2, b_3, b_4)$. Nous remarquons que le signe de ses mineurs d'ordre 1, 2, 3 et 4 a déjà été étudié précédemment. A l'aide du logiciel Mathematica nous obtenons

$$dét(M(1, b_1, \ b_2 \ , b_3, b_4)) = 1 - 4a^2 + 3a^4 - 3b^2 - 2a^2b^2$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad 2b^4 - 2c^2 + 2b^2c^2 + c^4 - d^2 + 2a^2d^2 + b^2d^2 \\
&+ \quad 2a^4d\ cos(w - 4x) + (2b^2d + 4a^2b^2d - 2b^4d)cos(w - 2y) \\
&- \quad 6a^2bd\ cos(w - 2x - y) + (6a^2b - 4a^4b + 2a^2b^3 + 4a^2bc^2 \\
&- \quad 2a^2bd^2)cos(2x - y) + 2a^2c^2d\ cos(w + 2x - 2z) \\
&- \quad 2bc^2d\ cos(w + y - 2z) + 2b^3c^3\ cos(3y - 2z) \\
&+ \quad (4acd - 4a^3cd + 4ab^2cd)cos(w - x - z) - 4a^3c\ cos(3x - z) \\
&- \quad 4abcd\ cos(w + x - y - z) \\
&+ \quad (8abc + 4a^3bc - 4ab^3c - 4abc^3) \cdot cos(x + y - z) \\
&- \quad 8ab^2c\ cos(x - 2y + z).
\end{aligned}
$$

(1.10)

où $b_1 = aexp(ix), b_2 = bexp(iy), b_3 = cexp(iz), b_4 = dexp(iw), 0 < a, b, c, d < 1$. Il est clair que la valeur minimale de (1.10) est atteinte pour $x = arg\ b_1 = 0, y = arg\ b_2 = \pi, z = arg\ b_3 = 0$ et $w = arg\ b_4 = \pi$. Substituant ces valeurs dans (1.10) nous obtenons une expression quadratique en $d = |b_4|$ dont la racine pertinente est

$$r := (1 - 3a^2 - b - 4a^2b - 2b^2 + 2b^3 - 2ac - 4abc - c^2)(1 - 2a^2 - b)^{-1}.$$

Se référant à la preuve du théorème 1.2, où nous avons vu que $b < \sqrt{1-a} - a$ pour $0 \leq a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, nous obtenons que

$$1 - 2a^2 - b > 0 \quad si \quad 0 \leq a \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1.11}$$

avec $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc la racine r est positive si son numérateur est positif. Ce numérateur est un polynôme de degré 2 en c dont la racine positive est

$$s := \sqrt{(1 - 2a^2 - b)(1 - 2b^2)} - a - 2ab$$

si

$$F(b) := 2b^3 - 2b^2 - (1 + 4a^2)b + (1 - 3a^2) > 0.$$

Puisque $F(0) = 1 - 3a^2 > 0$ pour $0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $F(1) = -7a^2 < 0$ nous voyons que $F(b)$ a une racine dans $(0, 1)$ si $0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$. De plus nous remarquons que si a, b et c satisfont les conditions

$$0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad F(b) > 0 \quad et \quad 0 < c < \sqrt{(1 - 2a^2 b)(1 - 2b^2)} - a - 2ab \tag{1.12}$$

alors il existe $d > r$ tel que (1.10) soit négatif.

Maintenant nous allons démontrer que les conditions (1.12) sont plus restrictives que celles obtenues en considérant le signe des mineurs d'ordre ≤ 4. Se référant encore une fois à la preuve du théorème 1.2, il suffit de démontrer que

$$F(\sqrt{1-a} - a) < 0 \tag{1.13}$$

et

$$s < (1 - a^2 - b^2 - a - 2ab)(1 - a)^{-1}, \tag{1.14}$$

pour $0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

L'inégalité (1.13) est vraie parce que la plus petite racine positive de l'équation $F(\sqrt{1-x} - x) = 0$ est $x = 0.8019... > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Quant à l'inégalité (1.14) nous voyons qu'elle est équivalente à

$$\begin{aligned} G(a, b) := & - 2a + 3a^2 + 4a^3 - 6a^4 - b + 2ab + 3a^2 b - 8a^4 b + 4ab^2 \\ & - 2a^2 b^2 - 8a^3 b^2 + 2b^3 - 4ab^3 - 2a^2 b^3 - b^4 \\ = & \quad (-1 + 2a^2 + b)(2a - 3a^2 + b - 4a^2 b + b^2 - 4ab^2 - b^3) < 0. \end{aligned}$$

En vertu de (1.11) il suffit de trouver les valeurs de a telles que

$$g(b) := 2a - 3a^2 + b - 4a^2 b + b^2 - 4ab^2 - b^3$$

soit positif. A cette fin nous remarquons que $g'(b) = 0$ si et seulement si $b = 1 - 2a > 0$ avec $1 - 2a > \sqrt{1-a} - a$. Ainsi $g(b)$ est une fonction croissante si $0 < b < \sqrt{1-a} - a$. Puisque par (1.13) $\sqrt{1-a} - a$ est plus grand que la plus petite racine positive de F(b) nous obtenons

$$g(b) \geq g(0) = 2a - 3a^2 > 0 \quad si \quad 0 < a < 2/3,$$

ce qui met fin à la preuve du théorème 1.3.

∎

REMARQUE 1.3. Si $a = 0, b = 1$ alors le numérateur et le dénominateur de la racine r sont zéros. Dans ce cas notre raisonnement ne nous donne pas l'inégalité correspondante $|a_0| + |a_2| + |a_4| < ||P||$, $P \in \mathcal{P}_n$.

1.4 Applications dans $\mathcal{P}_n$

En dépit du manque de généralité de nos résultats nous aimerions signaler qu'ils peuvent être utilisés afin d'obtenir d'autres inégalités polynomiales. Dans cette section nous allons en mentionner quelques unes. A cet effet nous avons besoin d'une formule d'interpolation qui est contenue dans le

LEMME C. *Pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 2$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ nous avons*

$$\begin{aligned} a_0 \quad &+ \quad (nP(z) - zP'(z) - 2a_0)exp(i\gamma) + (zP'(z) - P(z) + a_0)exp(2i\gamma) \\ &\equiv \quad exp\left(\frac{i\gamma}{n-1}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\left[exp\left\{-\frac{(2k\pi+\gamma)i}{n-1}\right\}\left\{sin^2\frac{2k\pi+\gamma}{2}\right\}\right. \\ &\quad \times \left\{sin^2\frac{2k\pi+\gamma}{2(n-1)}\right\}^{-1} P\left(z exp\left\{\frac{(2k\pi+\gamma)i}{n-1}\right\}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{1.15}$$

La formule d'interpolation (1.15) s'obtient en appliquant le théorème des résidus à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}\frac{P(w)}{(w-z)^2 w(w^{n-1} - z^{n-1}e^{i\gamma})}dw, \quad \text{où } \rho \to \infty.$$

En vertu de (1.15) nous voyons que le polynôme

$$Q(w) = a_0 + (nP(z) - zP'(z) - 2a_0)w + (zP'(z) - P(z) + a_0)w^2$$

est borné par $(n-1)||P||$ pour $|w| \leq 1$, $|z| \leq 1$. Appliquant le théorème 1.1 à $Q(w)$ nous obtenons le résultat suivant:

THEOREME 1.1' [6]. *Soient $P \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 2$ et $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous avons, pour $|z| \leq 1$,*

$$|a_0| + x|nP(z) - zP'(z) - 2a_0| + (1-2x^2)|zP'(z) - P(z) + a_0) \leq (n-1)||P||. \quad (1.16)$$

Un fait intéressant à remarquer est que l'inégalité (1.16) appliquée à $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \in \mathcal{P}_2$ donne (1.2). Pour $x = 0$ nous obtenons de (1.16) l'inégalité connue [8, p.93]

$$|a_0| + |zP'(z) - P(z) + a_0| \leq (n-1)||P||, \quad n \geq 2,$$

qui est un raffinement de l'inégalité classique (0.9).

D'autres inégalités du type (1.16) peuvent être obtenues des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3. Par exemple, en vertu du théorème 1.2 et de la formule d'interpolation [9, Lemme 1]

$$\begin{aligned} a_0 &+ ((n-1)P(z) - zP'(z) + a_n z^n - 2a_0)exp(i\gamma) \\ &+ (zP'(z) - P(z) - 2a_n z^n + a_0)exp(2i\gamma) + a_n z^n exp(3i\gamma) \\ &\equiv exp\left(\frac{i\gamma}{n-2}\right) \sum_{k=1}^{n-2} [exp\left\{-\frac{(2k\pi+\gamma)i}{n-2}\right\} \left\{sin^2 \frac{2k\pi+\gamma}{2}\right\} \\ &\quad \times \left\{sin^2 \frac{2k\pi+\gamma}{2(n-2)}\right\}^{-1} P\left(zexp\left\{\frac{(2k\pi+\gamma)i}{n-2}\right\}\right)]. \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_n$, $n \geq 3$, nous obtenons le

THEOREME 1.2' [6]. *Soient $P \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 3$ et x_1, x_2, x_3 comme dans le théorème 1.2. Nous avons, pour $|z| \leq 1$,*

$$|a_0| + x_1|(n-1)P(z) - zP'(z) + a_nz^n - 2a_0| \\ + x_2|zP'(z) - P(z) - 2a_nz^n + a_0| + x_3|a_nz^n| \leq (n-2)||P||. \tag{1.17}$$

En appliquant l'inégalité (1.17) à $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 \in \mathcal{P}_3$ nous obtenons (1.3).

CHAPITRE 2

RAFFINEMENTS DE L'INÉGALITÉ DE BERNSTEIN

2.1 Une amélioration pour la dérivée seconde

Soit $P \in \mathcal{P}_n$. L'inégalité (0.9) est susceptible d'une généralisation immédiate. En effet, en l'appliquant k fois de suite nous voyons que si $1 \leq k \leq n$ alors

$$||P^{(k)}|| \leq n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)||P||. \tag{2.1}$$

Maintenant, si l'inégalité n'a pas lieu dans (2.1) alors nous pouvons considérer le problème de trouver la plus grande valeur $c_{k,0}(n)$ telle que pour tout $P \in \mathcal{P}_n$,

$$||P^{(k)}|| + c_{k,0}(n)|a_0| \leq n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)||P||, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Dans le théorème qui suit nous résolvons ce problème pour $k = 2$.

THEOREME 2.1. *Si $P \in \mathcal{P}_n$ alors*

$$||P''|| + c_{2,0}(n)|a_0| \leq n(n-1)||P||, \tag{2.2}$$

où $c_{2,0}(n) = 2(n-1)(2n-1)/(n+1)$ si $n \geq 1$. Le coefficient de $|a_0|$ est le meilleur possible pour tout n.

Démonstration. Nous divisons les deux côtés de (2.2) par $n(n-1)$ et exprimons l'inégalité ainsi obtenue comme $||Q * P|| \leq ||P||$. Ensuite nous montrerons que $Q \in \mathcal{B}_n$. Remarquons que

$$||P''|| + c_{2,0}|a_0| = \sup_{|\alpha| < c_{2,0}(n)} ||z^2 P''(z) + \overline{\alpha} a_0||$$

et

$$\frac{1}{n(n-1)}\{z^2 P''(z) + \overline{\alpha} a_0\} = Q_\alpha(z) * P(z)$$

où

$$Q_\alpha(z) = \frac{1}{n(n-1)}\{\sum_{\nu=0}^{n} \nu(\nu-1)z^\nu + \overline{\alpha}\}.$$

Puisque

$$\tilde{Q}_\alpha(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\nu(\nu-1)}{n(n-1)} z^{n-\nu} + \frac{\alpha}{n(n-1)} z^n$$

nous devons démontrer, en vertu du lemme B et de (1.5), que l'inégalité $||\tilde{Q}_\alpha * P|| \leq ||P||$ est satisfaite pour tout $P \in \mathcal{P}_n$ si $|\alpha| < c_{2,0}(n)$. A cette fin nous devons trouver les valeurs de α pour lesquelles

$$M(n(n-1), (n-1)(n-2), (n-2)(n-3), \ldots, 2, 0, \alpha) \tag{2.3}$$

est définie positive. Prenons le mineur principal d'ordre $n+1$ de (2.3) et

(i) soustrayons sa $(i+1)^{ième}$ ligne de sa $i^{ième}$ ligne pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) Maintenant, pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, nous soustrayons la nouvelle $(i+1)^{ième}$ ligne de la nouvelle $i^{ième}$ ligne. Ensuite,

(iii) effectuons la même opération mais cette fois-ci pour $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Finalement,

(iv) après avoir ajouté la deuxième colonne à la troisième, la nouvelle troisième colonne à la quatrième et, en général, la nouvelle $l^{ième}$ colonne à la $(l+1)^{ième}$ colonne pour $l = 3, 4, \ldots, n-1$ nous voyons aisément que la valeur du mineur principal d'ordre $n+1$ est

$$\{2(2n-1)\}^{n-4} \begin{vmatrix} 0 & -2(2n-1) & 0 & 0 & \alpha \\ -\overline{\alpha} & 0 & -2(2n-1) & 0 & 0 \\ 2+\overline{\alpha} & 2 & 2(n-1)-2 & -2n & 2 \\ -\overline{\alpha} & 2 & (n-1)(n-2) & n(n-1) & -2(n-1) \\ \overline{\alpha} & 0 & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3} & \frac{n(n-1)(n-2)}{3} & n(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\{2(2n-1)\}^{n-4}\, n\, \{(-16 + 116n - 328n^2 + 452n^3 + 304n^4 + 80n^5) +$$

$$
\begin{aligned}
& 2(8 - 28n + 28n^2 - 8n^3)Re(\alpha) - (4 + n + 2n^2 + 5n^3)|\alpha|^2\} \\
= \; & A_n + B_n Re(\alpha) + C_n|\alpha|^2 \\
\geq \; & A_n - |B_n||\alpha| + C_n|\alpha|^2 \\
> \; & 0
\end{aligned}
$$

si $|\alpha| < c_{2,0}(n)$. Maintenant nous remarquons que les mineurs principaux d'ordre $n, n-1, \ldots, 1$ de (2.3) sont les mêmes que ceux de $M(n(n-1), (n-1)(n-2), (n-2)(n-3), \ldots, 2, 0)$ qui sont positifs puisque $||P''|| \leq n(n-1)||P||$ par (2.1). Il s'en suit que $||P''|| + |\alpha||a_0| \leq n(n-1)||P||$ si $|\alpha| \leq c_{2,0}(n)$. Si $|\alpha|$ est juste un peu plus grand que $c_{2,0}(n)$ alors le mineur d'ordre $n+1$ est négatif et donc Q_α ne peut pas appartenir à $\mathcal{B}_n^0$. Par conséquent le coefficient de $|a_0|$ dans (2.2) est le plus grand possible.

■

Nous avons essayé d'appliquer la méthode de convolution pour résoudre le problème pour d'autres valeurs de k, mais en vain. La difficulté réside au niveau de la recherche des valeurs de α telles que la matrice associée au problème en question soit semi-définie positive.

Dans la section qui suit nous présentons le résultat principal de ce chapitre.

2.2 Inégalité asymptotique

2.2.1 Introduction et énoncé du résultat asymptotique

Des inégalités optimales de la forme

$$||P'|| + c_{1,k}(n)|a_k| \leq n||P||, \quad P \in \mathcal{P}_n \tag{2.4}$$

ont été obtenues pour $k = 0$ et $k = 1$ dans [8] et pour $k = 2$ dans [7]. Le problème n'avait pas encore été résolu pour $k \in \mathbb{N}$ arbitraire. Pour les cas connus $k = 0, 1, 2$

l'inégalité (2.4) a été démontrée par la méthode de convolution. Ici nous étudions le problème pour les autres valeurs de k. La méthode de convolution sera de nouveau un outil essentiel dans l'étude des constantes $c_{1,k}(n), k \geq 3$.

Afin de déterminer $c_{1,k}(n)$ nous divisons les deux côtés de (2.4) par n et remarquons que

$$\frac{1}{n}(||P'|| + c_{1,k}(n)|a_k|) = \sup_{|\alpha|<c_{1,k}(n)} ||Q * P||$$

où

$$Q(z) = Q_\alpha(z) := \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} \frac{j}{n} z^j + \frac{\overline{\alpha}+k}{n} z^k.$$

Il suffirait alors de démontrer que $Q_\alpha \in \mathcal{B}_n$ si $|\alpha| < c_{1,k}(n)$. En vertu de (1.5) nous démontrerons plutôt que

$$\dot{Q}_\alpha(z) = 1 + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{n-j}{n} z^j + \frac{k+\alpha}{n} z^{n-k}$$

appartient à $\mathcal{B}_n^0$ si $|\alpha| < c_{1,k}(n)$.

Dorénavant nous utiliserons la notation $D(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ pour désigner le déterminant de la matrice $M(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Par le Lemme A, l'inégalité $||\dot{Q}_\alpha * P|| \leq ||P||$ est satisfaite pour tout $P \in \mathcal{P}_n$ et $|\alpha| \leq c_{1,k}(n)$ si et seulement si la matrice

$$M(n, n-1, \ldots, k+1, k+\alpha, k-1, \ldots, 0) \tag{2.5}$$

est semi-définie positive pour $|\alpha| \leq c_{1,k}(n)$. Maintenant par le Lemme B, voyons $c_{1,k}(n)$ comme étant le *plus grand* nombre $A_k(n)$ tel que tous les mineurs principaux de (2.5) soient positifs pour tout α dans $|z| < A_k(n)$. Les mineurs principaux d'ordre inférieur à $n-k$ ne dépendent pas de α et nous pouvons facilement voir qu'ils sont tous positifs. En effet, considérons $D(n, n-1, \ldots, j)$ pour $0 \leq j \leq n$ et

(i) soustrayons sa $(i+1)^{ième}$ ligne de sa $i^{ième}$ ligne pour $i = 1, 2, \ldots, n-j$. Ensuite,

(ii) soustrayons la nouvelle $(i+1)^{ième}$ de sa nouvelle $i^{ième}$ ligne pour $i = 1, 2, \ldots, n - j - 1$.

(iii) Développant le déterminant ainsi obtenu par ses lignes numéros $1, 2, \ldots, n-j-1$ nous obtenons

$$D(n, n-1, \ldots, j) = 2^{n-j-1}(n+j),$$

qui est évidemment positif. Nous devons donc seulement étudier les mineurs principaux de (2.5) d'ordre $\geq n-k+1$. La détermination exacte de $A_k(n)$, i.e. $c_{1,k}(n)$, lorsque $3 \leq k \leq n-1$ n'est pas aisée. Ici nous étudierons plutôt son comportement asymptotique lorsque $n \longrightarrow \infty$. Plus précisément nous démontrerons le

THEOREME 2.2 [5]. *Soit $c_{1,k}(n)$ la constante apparaissant dans (2.4). Pour chaque k, la suite $c_{1,k}(n)$ tend vers une limite finie c_k lorsque $n \longrightarrow \infty$. La constante c_k est, pour $k \geq 2$, la plus petite racine positive de l'équation*

$$D(2, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ zéros}}, x, -2x, x, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-2 \text{ zéros}}) = 0.$$

2.2.2 Démonstration du résultat asymptotique

La preuve du théorème 2.2 est longue. Afin qu'elle ne deviennent pas accablante nous la présentons sous la forme de lemmes.

Nous aurons besoin du résultat classique suivant, dû à Laplace, qui sera utile pour vérifier la relation de récurrence donnée dans le lemme 2.5.

LEMME D. Le déterminant de la matrice $A = [c_{ij}]_{m\times m}$ *est égal à*

$$|A| = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq m} (-1)^{\sum_{\nu=1}^{p}(i_\nu+j_\nu)} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{pmatrix} \cdot A\begin{pmatrix} i_1' & \cdots & i_p' \\ j_1' & \cdots & j_p' \end{pmatrix}$$

pour n'importe quel choix de p colonnes $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m$. *Ici*

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} c_{i_1 j_1} & c_{i_1 j_2} & \cdots & c_{i_1 j_p} \\ c_{i_2 j_1} & c_{i_2 j_2} & \cdots & c_{i_2 j_p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{i_p j_1} & c_{i_p j_2} & \cdots & c_{i_p j_p} \end{vmatrix}$$

et $\{k_1', k_2', \ldots, k_p'\} := \{1, 2, \ldots, m\}/\{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$.

Notre prochain lemme se lit comme suit.

LEMME 2.1. *Pour* $0 \leq j \leq k$ *et* $n \geq 2k - j + 4$ *nous avons*

$$D(n+1, n, \ldots, k+1, k+\alpha, k-1, \ldots, j) = 4D(n, n-1, \ldots, k+2, k+1+\alpha, k, \ldots, j+1) \quad (2.6)$$

où, dans le cas $j = k$, *l'identité signifie*

$$D(n+1, n, \ldots, k+1, k+\alpha) = 4D(n, n-1, \ldots, k+2, k+1+\alpha). \quad (2.6')$$

Démonstration. Bien que les deux déterminants dans (2.6) ne soient pas du même ordre nous pouvons les réduire à des déterminants du même ordre par des opérations élémentaires. La propriété de linéarité du déterminant est utilisée par la suite afin d'obtenir l'identité désirée. Voici les détails.
Prenons d'abord $D(n, n-1, \ldots, k+2, k+1+\alpha, k, \ldots, j+1)$ et

(i) soustrayons sa $(i+1)^{ième}$ ligne de sa $i^{ième}$ ligne pour $i = 1, 2, \ldots, n-j-1$.

(ii) soustrayons la nouvelle $(i+1)^{ième}$ ligne de sa nouvelle $i^{ième}$ ligne pour $i = 1, 2, \ldots, n-j-2$.

(iii) ensuite remarquons que chacune des lignes numéros $k-j+2$ à $n-k-3$ du déterminant ainsi obtenu contient un seul élément non-nul et celui-ci est égal à -2. Développant ce déterminant par ces lignes l'une à la suite de l'autre nous obtenons, lorsque $0 \leq j \leq k-2$, la formule

$$D(n, n-1, \ldots, k+2, k+1+\alpha, k, \ldots, j+1) = 2^{n+j-2(k+2)} |[c_{\mu,\nu}]_{1 \le \mu,\nu \le 2(k-j+2)}|$$

où, pour $1 \le \mu \le k-j+1$,

$$c_{\mu,\nu} = \begin{cases} -2 & \text{si } \nu = \mu+1 \\ \alpha & \text{si } \nu = \mu+k-j+3 \\ -2\alpha & \text{si } \nu = \mu+k-j+4 \\ \alpha & \text{si } \nu = \mu+k-j+5 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

pour $k-j+2 \le \mu \le 2(k-j+1)$,

$$c_{\mu,\nu} = \begin{cases} -2 & \text{si } \nu = \mu+1 \\ \overline{\alpha} & \text{si } \nu = \mu-k+j-1 \\ -2\overline{\alpha} & \text{si } \nu = \mu-k+j-2 \\ \overline{\alpha} & \text{si } \nu = \mu-k+j-3 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c_{2k-2j+3,\nu} = \begin{cases} 1+\overline{\alpha} & \text{si } \nu = k-j \\ 1-\overline{\alpha} & \text{si } \nu = k-j+1 \\ -1 & \text{si } \nu = 2(k+j+2) \\ 1 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c_{2(k-j+2),\nu} = \begin{cases} j+\nu & \text{si } 1 \le \nu \le k-j \\ k+1+\overline{\alpha} & \text{si } \nu = k-j+1 \\ k+2 & \text{si } \nu = k-j+2 \\ n-2(k-j)-4+\nu & \text{si } k-j+3 \le \nu \le 2(k-j+2). \end{cases}$$

Lorsque $j = k-1$ nous obtenons

$$D(n, n-1, \ldots, k+2, k+1+\alpha, k, \ldots, j+1) =$$

$$2^{n-k-5}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha \\ \overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1+\overline{\alpha} & 1-\overline{\alpha} & 1 & 1 & 1 & -1 \\ k & k+1+\overline{\alpha} & k+2 & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Quant à $D(n+1, n, \ldots, k+1, k+\alpha, k-1, \ldots, j)$ nous

(i) soustrayons sa $(i+1)^{ième}$ ligne de sa $i^{ième}$ ligne pour $i = 1, 2, \ldots, n-j+1$.

(ii) soustrayons sa nouvelle $(i+1)^{ième}$ ligne de sa nouvelle $i^{ième}$ ligne pour $i = 1, 2, \ldots, n-j$.

(iii) Maintenant, dans le déterminant résultant chacune des lignes numéro $k-j+2$ à $n-k-1$ a la propriété que tous ses éléments sont nuls sauf un qui est égal à -2. Si nous développons ce déterminant par ces lignes, l'une à la suite de l'autre, nous obtenons, lorsque $0 \leq j \leq k-2$, la formule

$$D(n+1, n, \ldots, k+1, k+\alpha, k-1, \ldots, j) = 2^{n+j-2(k+1)} \cdot |[c'_{\mu,\nu}]_{1\leq\mu,\nu\leq 2(k-j+2)}|$$

où $c'_{\mu,\nu} = c_{\mu,\nu}$ si $1 \leq \mu \leq 2k-2j+3$, $1 \leq \nu \leq 2(k-j+2)$ et

$$c'_{2(k-j+2),\nu} = \begin{cases} j+\nu-1 & \text{si } 1 \leq \nu \leq k-j \\ k+\overline{\alpha} & \text{si } \nu = k-j+1 \\ k+1 & \text{si } \nu = k-j+2 \\ n-2(k-j)-3+\nu & \text{si } k-j+3 \leq \nu \leq 2(k-j+2). \end{cases}$$

Dans le cas $j = k-1$ nous obtenons

$$D(n+1, n, \ldots, k+1, k+\alpha, k-1, \ldots, j) =$$

$$2^{n-k-3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha \\ \overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1+\overline{\alpha} & 1-\overline{\alpha} & 1 & 1 & 1 & -1 \\ k-1 & k+\overline{\alpha} & k+1 & n-1 & n & n+1 \end{vmatrix}.$$

Maintenant la propriété de linéarité du déterminant nous permet d'écrire, lorsque $0 \leq j \leq k-2$,

$D(n+1, n, \ldots, k+1, k+\alpha, k-1, \ldots, j) = 4D(n, n-1, \ldots, k+2, k+1+\alpha, k, \ldots, j+1) + 2^{n+j-2(k+1)}$.

$$\begin{array}{c} \hspace{2cm}\overbrace{\hspace{6cm}}^{k-j+1 \text{ zéros}} \hspace{3cm} \overbrace{\hspace{3cm}}^{k-j-2 \text{ zéros}} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{\alpha} & -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} & -2\overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\alpha} & -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\overline{\alpha} & 1-\overline{\alpha} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \tag{2.7}$$

(en précisant qu'il y a tout d'abord $k-j+1$ zéros sur la première colonne du deuxième déterminant apparaissant dans le membre de droite de (2.7)). Dans le cas $j = k-1$ nous avons

$$D(n+1, n, \ldots, k+1, k+\alpha, k-1, \ldots, j) = 4D(n, n-1, \ldots, k+2, k+1+\alpha, k, \ldots, j+1)$$

$$+2^{n-k-3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha \\ \overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1+\overline{\alpha} & 1-\overline{\alpha} & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

Mais le deuxième déterminant dans le membre de droite de (2.7) est égal à zéro. En effet, si nous

(vii) soustrayons sa $(2k-2j+4)^{ième}$ ligne de sa $(2k-2j+3)^{ième}$ ligne,

(viii) ajoutons à sa $(2k-2j+4)^{ième}$ ligne 1/2 fois la $(k-j+2)^{ième}$ ligne,

(ix) ajoutons à sa nouvelle $(2k-2j+4)^{ième}$ ligne 1/2 fois la $(k-j+i)^{ième}$ ligne pour $i=3,4,\dots,k-j+3$,

alors tous les éléments de sa dernière ligne deviennent égaux à zéro et donc l'identité (2.6) est vraie lorsque $0 \leq j \leq k-2$. Si nous appliquons les opérations élémentaires (vii), (viii) et (ix) avec $j=k-1$, au deuxième déterminant du membre de droite de (2.8) nous voyons que l'inégalité (2.6) est vraie dans le cas $j=k-1$ aussi.

La preuve de (2.6′) est tout à fait analogue.

■

COROLLAIRE 2.1. *Si* $n \geq 2k+4$ alors $c_{1,k+1}(n) \leq c_{1,k}(n+1)$.

Preuve. Remarquons que $c_{1,k}(n+1)$ est le *plus grand* nombre R tel que les determinants $D(n+1,n,\dots,k+1,k+\alpha,k-1,\dots,j)$, $0 \leq j < k$ et $D(n+1,n,\dots,k+1,k+\alpha)$ sont *tous* nonnégatifs pour $|\alpha| \leq R$. Donc par le lemme 2.1, les déterminants $D(n,n-1,\dots,k+2,k+1+\alpha,k,\dots,j)$, $1 \leq j \leq k$ et $D(n,n-1,\dots,k+2,k+1+\alpha)$ sont tous nonnégatifs si $|\alpha| \leq c_{1,k}(n+1)$. Cependant $D(n,n-1,\dots,k+2,k+1+\alpha,k,\dots,1,0)$ n'est pas nécéssairement nonnégatif pour $|\alpha| \leq c_k(n+1)$. Puisque $c_{1,k+1}(n)$ est le *plus grand* nombre ρ tel que *tous* les mineurs principaux (incluant $D(n,n-1,\dots,k+2,k+1+\alpha,k,\dots,1,0)$) de $M(n,n-1,\dots,k+2,k+1+\alpha,k,\dots,0)$ sont nonnégatifs pour $|\alpha| \leq \rho$ il s'en suit que $c_{1,k+1}(n) \leq c_{1,k}(n+1)$.

■

Maintenant, nous démontrons le lemme crucial suivant.

LEMME 2.2. *Soient $n \geq 2k - j + 4$ et*

$$r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) := \begin{cases} D(n,n-1,\dots,k+1,k+\alpha,k-1,\dots,j) & \text{si } 0 \leq j \leq k-1 \\ D(n,n-1,\dots,k+1,k+\alpha) & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Alors

$$2^{-n+2k-j+4} \cdot r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) = 2(n+j)q^{*}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) + q^{**}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$$

où

$$q^{*}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) := \begin{cases} D(2,\underbrace{0,0,\dots,0}_{k-j \text{ zéros}},\alpha,-2\alpha,\alpha,\underbrace{0,0,\dots,0}_{k-j-2 \text{ zéros}}) & \text{si } j \leq k-2 \\ D(2,0,\alpha,-2\alpha) & \text{si } j = k-1 \\ D(2,\alpha) & \text{si } j = k \end{cases} \tag{2.9}$$

et $q^{**}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$, un déterminant d'ordre $2(k-j+2)$, est une expression de la forme $(Re\alpha)o_{k,j}(|\alpha|^2) + v_{k,j}(|\alpha|^2)$ où $o_{k,j}$, $v_{k,j}$ sont des polynômes. De plus, $q^{*}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$ est une expression de la forme $\eta_{k,j}(|\alpha|^2)$ où $\eta_{k,j}$ est un polynôme.

REMARQUE 2.1. Par (2.9) il est clair que $q^{*}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$ dépend de k et de j mais non de n. Puisqu'il s'avère être de la forme $\eta_{k,j}(|\alpha|^2)$, il ne dépend pas de l'argument de α non plus. Nous verrons, lors de la démonstration du lemme que $q^{**}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$ ne dépend pas de n mais seulement de k et j.

Démonstration. Considérons $r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$ et

(i) soustrayons sa $(i+1)^{ième}$ ligne de sa $i^{ième}$ ligne, $i = 1,2,\dots,n-j$,

(ii) soustrayons la nouvelle $(i+1)^{ième}$ ligne de sa nouvelle $i^{ième}$ ligne, $i = 1,2,\dots,n-j-1$.

(iii) Remarquons maintenant que tous les éléments dans chacune des lignes numéros $k-j+2$ à $n-k-2$ du déterminant résultant sont nuls sauf un qui est égal à -2. Développant ce déterminant successivement par ces $n-2k+j-3$ lignes nous obtenons

$$r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) = 2^{n-2k+j-3}|[c'_{\mu,\nu}]_{1\leq\mu,\nu\leq 2(k-j+2)}|$$

où les éléments $c'_{\mu,\nu}$ sont les mêmes que ceux apparaissant dans la preuve du Lemme 2.1.

(iv) Ajoutons les lignes numéro $k-j+2$ à $2k-2j+2$ à la $(2k-2j+3)^{ième}$ ligne.

(v) Considérons maintenant $r_{n,k,j}(\overline{\alpha},\alpha)$. Permutons la $i^{ième}$ ligne avec la ligne numéro $2k-2j-(i-3)$ pour $i=1,2,\dots,k-j+1$. Dans le déterminant ainsi obtenu permutons la $l^{ième}$ colonne avec la colonne numéro $(2k-2j-(l-5))$ pour $l=1,2,\dots,k-j+2$. Maintenant, multiplions tous les éléments de la $(2k-2j+3)^{ième}$ ligne par (-1).

(vi) Puisque $r_{n,k,j}(\overline{\alpha},\alpha)=r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$ nous pouvons écrire

$$r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha})=\frac{1}{2}\left(r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha})+r_{n,k,j}(\overline{\alpha},\alpha)\right)$$

et nous obtenons une autre formule pour $r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$. Afin de l'écrire nous devons introduire quelques notations. Soit $D_{\mu,\nu,\alpha,\overline{\alpha}}:=|[\gamma_{\mu,\nu}]_{1\le\mu,\nu\le 2(k-j+2)}|$ où pour $1\le\mu\le 2(k-j+1)$, $1\le\nu\le 2(k-j+2)$ nous avons $\gamma_{\mu,\nu}=c_{\mu,\nu}$ et

$$\gamma_{2k-2j+3,\nu}=\begin{cases}1 & \text{si } 1\le\nu\le k-j+2\\ -1 & \text{si } k-j+3\le\nu\le 2(k-j+2);\end{cases}$$

$$\gamma_{2(k-j+2),\nu}=\begin{cases}n+\overline{\alpha}+j & \text{si } \nu=k-j+1\\ n+\alpha+j & \text{si } \nu=k-j+4\\ n+j & sinon.\end{cases}$$

De plus soit

$$\Delta_{n,k,\alpha,\overline{\alpha}}:=\begin{vmatrix}0 & -2 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha\\ \overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1\\ n+k-1 & n+k-1+\overline{\alpha} & n+k-1 & n+k-1 & n+k-1+\alpha & n+k-1\end{vmatrix}.$$

$$\Delta'_{n,k,\alpha,\overline{\alpha}} := \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & \alpha \\ \overline{\alpha} & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ n+k+\overline{\alpha} & n+k & n+k & n+k+\alpha \end{vmatrix}.$$

En fonction de ces notations nous avons

$$r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) = \begin{cases} 2^{n-2k+j-4}\cdot D_{\mu,\nu,\alpha,\overline{\alpha}} & \text{si } 0 \le j \le k-2 \\ 2^{n-k-5}\cdot \Delta_{n,k,\alpha,\overline{\alpha}} & \text{si } j = k-1 \\ 2^{n-k-4}\cdot \Delta'_{n,k,\alpha,\overline{\alpha}} & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Par la linéarité des déterminants nous pouvons écrire, si $0 \le j \le k-2$,

$$r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) = 2^{n-2k+j-4}\cdot\left\{2(n+j)q^{*}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) + q^{**}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha})\right\}$$

où $2q^{*}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$ est le déterminant

$$\begin{array}{c}
\hphantom{0\quad -2\quad}\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad}}^{k-j+1\text{ zéros}}\hphantom{\alpha\quad -2\alpha\quad \alpha\quad}\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0\quad 0}}^{k-j-2\text{ zéros}} \\
\begin{vmatrix}
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & \alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\
\overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\overline{\alpha} & -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \overline{\alpha} & -2\overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \overline{\alpha} & -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}
\end{array}$$

d'ordre $2(k-j+2)$ et $q^{**}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$ représente

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0}}^{k-j+1 \text{ zéros}}} & & & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0}}^{k-j-2 \text{ zéros}}}
\end{array}$$

$$\begin{vmatrix}
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & \alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\
\overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\overline{\alpha} & -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \overline{\alpha} & -2\overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \overline{\alpha} & -2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\alpha} & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix},$$

qui est aussi un déterminant d'ordre $2(k-j+2)$ (en précisant que sur la première colonne des deux déterminants ci-dessus il y a tout d'abord $k-j+1$ zéros) . De même.

$$r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) = 2^{n-k-5} \quad ((n+k-1) \begin{vmatrix}
0 & -2 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha \\
\overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
-2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
0 & -2 & 0 & 0 & \alpha & -2\alpha \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha \\
\overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
-2\overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 0 & 0 & -2 & 0 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & \overline{\alpha} & 0 & 0 & \overline{\alpha} & 0
\end{vmatrix})$$

si $j = k-1$ et

$$r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) = 2^{n-k-4} \cdot ((n+k) \cdot \begin{vmatrix}
0 & -2 & 0 & \alpha \\
\overline{\alpha} & 0 & -2 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
0 & -2 & 0 & \alpha \\
\overline{\alpha} & 0 & -2 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 \\
\overline{\alpha} & 0 & 0 & \alpha
\end{vmatrix})$$

si $j = k$.

Maintenant nous démontrons (2.9). A cette fin nous

(vii) soustrayons la $(2k-2j+3)^{ième}$ ligne de $2q^{*}_{k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$ de sa ligne numéro $(2k-2j+4)$. Ensuite divisons la nouvelle $(2k-2j+4)^{ième}$ ligne par 2. Puis ajoutons la nouvelle $(2k-2j+4)^{ième}$ ligne à la $(2k-2j+3)^{ième}$ ligne.

(viii) Pour $i = k-j+4, k-j+3, \ldots, 4, 3$ permutons la ligne numéro $(k-j+i)$ avec la $(k-j+(i-1))^{ième}$ ligne . Dans le déterminant ainsi obtenu effectuons la même opération pour $i = k-j+4, k-j+3, \ldots, 5, 4$.

(ix) Soustrayons la $(l+1)^{ième}$ colonne de la $l^{ième}$ pour $l = 1, 2, \ldots, k-j+1$. Ensuite, pour $l = 2k-2j+3, 2k-2j+2, \ldots, k-j+3$ soustrayons la $l^{ième}$ colonne de la $(l+1)^{ième}$.

(x) Développons le déterminant qui en résulte par sa $(k-j+2)^{ième}$ ligne, puis par sa $(k-j+3)^{ième}$ ligne successivement.

Dans le cas particulier $j = k$ nous obtenons $q^{*}_{k,j}(\alpha, \overline{\alpha}) = D(2, \alpha)$.

(xi) Si $0 \leq j \leq k-2$ alors nous ajoutons à la $(k-j)^{ième}$ ligne la ligne numéro $(k-j+1)$. Maintenant ajoutons la nouvelle $i^{ième}$ ligne à la $(i-1)^{ième}$ ligne pour $i = k-j, k-j-1, \ldots, 3, 2$. Ensuite ajoutons la $(k-j+2)^{ième}$ ligne à la ligne numéro $(k-j+3)$ et ajoutons la nouvelle $i^{ième}$ ligne à la $(i+1)^{ième}$ ligne pour $i = k-j+3, k-j+4, \ldots, 2k-2j+1$.

Dans le cas $j = k-1$ nous ajoutons la deuxième ligne à la première. Ensuite ajoutons la troisième ligne à la quatrième.

Ici se termine la preuve de (2.9).

Afin de démontrer que $q^{*}_{k,j}(\alpha, \overline{\alpha})$ est une expression de la forme $\eta_{k,j}(|\alpha|^2)$ nous considérons sa représentation donnée dans (2.9) et nous multiplions ses $k-j+1$ premières colonnes par α puis nous remarquons que chacune des $k-j+1$ premières lignes du déterminant ainsi obtenu a α comme facteur.

Pour démontrer que $q^{**}_{k,j}(\alpha, \overline{\alpha})$ est une expression de la forme $(Re\alpha)\varphi_{k,j}(|\alpha|^2) + \psi_{k,j}(|\alpha|^2)$ nous y effectuons les opérations suivantes, l'une à la suite de l'autre.

(i) Multiplions les $k-j+1$ premières colonnes de $q^{**}_{k,j}(\alpha, \overline{\alpha})$ par α et les $k-j+1$ premières lignes par $\overline{\alpha}$.

(ii) Soustrayons la $l^{ième}$ colonne de la colonne numéro $l+1$ pour $l = 2k-2j+3, \ldots, k-j+3$.

(iii) Multiplions la $(k-j+2)^{ième}$ colonne par α et la $(2k-2j+3)^{ième}$ ligne par $\overline{\alpha}$.

(iv) Ajoutons la $(k-j+4)^{ième}$ colonne à la $(k-j+5)^{ième}$.

(v) Notons a_{il}, $i, l = 1, 2, \ldots, 2(k-j+2)$ les éléments du déterminant ainsi obtenu. Nous remarquons que $a_{2(k-j+2),k-j+1} = |\alpha|^2$, $a_{2(k-j+2),k-j+4} = \alpha$ et tous les autres éléments de la dernière ligne sont nuls. De plus $a_{2k-2j+3,k-j+3} = -\overline{\alpha}$ et tous les autres éléments du déterminant sont soit des constantes, soit des constantes multiples de $|\alpha|^2$. Le développant par sa dernière ligne, puis développant le mineur de $|\alpha|^2$ par sa $(k-j+2)^{ième}$ colonne et le mineur de α par sa $(k-j+3)^{ième}$ colonne, nous obtenons

$$|\alpha|^{2(k-j+2)} \cdot q_{k,j}^{**}(\alpha, \overline{\alpha}) = |\alpha|^2 \left(\overline{\alpha}\Delta_1(|\alpha|^2) + \Delta_2(|\alpha|^2)\right) + \alpha\left(\overline{\alpha}\Delta_3(|\alpha|^2) + \Delta_4(|\alpha|^2)\right)$$

où Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, sont des déterminants d'ordre $2(k-j+1)$. Maintenant, remarquons que les $k-j+1$ premières lignes de Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 ont $|\alpha|^2$ comme facteur. Quant à Δ_4 sa dernière ligne a aussi $|\alpha|^2$ comme facteur. Donc

$$q_{k,j}^{**}(\alpha, \overline{\alpha}) = \overline{\alpha}\Delta_1^*(|\alpha|^2) + \Delta_2^*(|\alpha|^2) + \Delta_3^*(|\alpha|^2) + \alpha\Delta_4^*(|\alpha|^2)$$

où Δ_1^*, Δ_2^*, Δ_3^*, Δ_4^* sont tous des déterminants et des polynômes en $|\alpha|^2$. Puisque $q_{k,j}^{**}(\alpha, \overline{\alpha})$ est une quantité réelle nous obtenons

$$q_{k,j}^{**}(\alpha, \overline{\alpha}) = (Re\alpha)\phi_{k,j}(|\alpha|^2) + \psi_{k,j}(|\alpha|^2).$$

Ceci complète la preuve du lemme 2.2.

■

Maintenant nous démontrons le

LEMME 2.3. *Le déterminant*

$$g(\lambda) := D(n, n-1, \ldots, k+1, k-\lambda, k-1, \ldots, j)$$

ne peut pas s'annuler pour des valeurs non réelles de λ.

Démonstration. Remarquons que $g(\lambda) = |A - \lambda B|$ où $A = D(n, n-1, \ldots, j)$ et $B = D(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k \text{ zéros}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-j \text{ zéros}})$. Il est connu que $|A - \lambda B| = 0$ si et seulement si le système d'équations

$$AX = \lambda BX \quad (i.e.\ (A - \lambda B)X = 0) \tag{2.10}$$

a une solution non-nulle. Donc il suffirait de démontrer que si A est une matrice hermitienne (ce qui est le cas ici) alors le système (2.10) ne peut pas avoir de solution non-nulle sauf si λ est réel. En effet si

$$AX = \lambda BX$$

alors, multipliant les deux côtés par $\overline{X}^t$, il vient

$$\overline{X}^t AX = \lambda \overline{X}^t BX. \tag{2.11}$$

Ensuite, prenant le conjugué nous obtenons

$$X^t \overline{A}\, \overline{X} = \overline{\lambda} X^t\, \overline{B}\, \overline{X}.$$

Maintenant si nous prenons la transposée des deux côtés et tenons compte du fait que $\overline{B}^t = B$, alors

$$\overline{X}^t AX = \overline{\lambda}\, \overline{X}^t BX. \tag{2.12}$$

Maintenant, les équations (2.11) and (2.12) impliquent

$$(\lambda - \overline{\lambda})(\overline{X}^t BX) = 0. \tag{2.13}$$

Remarquons que $\overline{X}^t BX \neq 0$ pour tout $X \neq 0$. Sinon, se référant à (2.12), il existerait $X \neq 0$ tel que $\overline{X}^t AX = 0$. Mais $\overline{X}^t AX$ est une forme hermitienne qui est définie positive de telle sorte que $\overline{X}^t AX > 0$ pour tout $X \neq 0$. Donc de (2.13) nous obtenons $\lambda = \overline{\lambda}$, i.e. $\lambda \in \mathbb{R}$.

■

Maintenant, nous devons trouver le plus grand disque centré à l'origine dans lequel $r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$ est positif pour $0 \leq j \leq k$. Par le lemme 2.2,

$$2^{-n+2k-j+4} r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) = 2(n+j)\eta_{k,j}(|\alpha|^2) + \upsilon_{k,j}(|\alpha|^2) + Re(\alpha)\phi_{k,j}(|\alpha|^2).$$

Donc $r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$ est certainement positif si son minimum, vu comme une fonction de $arg(\alpha)$, est positif, i.e. si l'une ou l'autre des deux fonctions

$$\begin{cases} f_{n,1}(x) = \eta_{k,j}(x^2) + \frac{1}{2(n+j)}\left(\upsilon_{k,j}(x^2) + x\phi_{k,j}(x^2)\right), \\ f_{n,2}(x) = \eta_{k,j}(x^2) + \frac{1}{2(n+j)}\left(\upsilon_{k,j}(x^2) - x\phi_{k,j}(x^2)\right) \end{cases} \tag{2.14}$$

est positive. En vertu du lemme 2.3 les racines de ces deux fonctions sont toutes réelles. Soit $c(n,k,j)$ la plus petite racine positive de la fonction appropriée, de telle sorte que $r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha}) > 0$ pour $|\alpha| < c(n,k,j)$. D'autre part, pour tout $\sigma > c(n,k,j)$, il correspond un nombre complexe α_σ, où $|\alpha_\sigma| = \sigma$, tel que $r_{n,k,j}(\alpha_\sigma,\overline{\alpha}_\sigma) < 0$. Mais alors par le lemme A le polynôme correspondant Q_{α_σ} n'appartient pas à $\mathcal{B}_n^0$, ce qui signifie qu'il existe un polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ tel que $||p'|| + \sigma|a_k| > n||p||$. Ainsi la meilleure constante possible $c_{1,k}(n)$, dans (2.4), est donnée par $c_{1,k}(n) = \min_{0\leq j\leq k} c(n,k,j)$. Quant au comportement asymptotique de $c_{1,k}(n)$ nous invoquons le théorème de Hurwitz pour affirmer que $\lim_{n\to\infty} c(n,k,j) =: c_k^{(j)}$ existe. De plus, le c_k apparaissant dans l'énoncé du théorème est $c_k = \min_{0\leq j\leq k} c_k^{(j)}$.

Finalement, nous allons démontrer que

$$\min_{0\leq j\leq k} c_k^{(j)} = c_k^{(0)}. \tag{2.15}$$

A cette fin nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 2.4. *Soient $k \geq 2$ et*

$$F_k(x) := D(2,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k\text{ zéros}},x,-2x,x,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k-2\text{ zéros}}).$$

Alors

$$F_k^2(x) = F_{k-1}(x)F_{k+1}(x) + 4p_k^2(x) \tag{2.16}$$

où

$$p_2(x) := -4x^3(6+x^2), \qquad p_3(x) := x^3(16+84x^2+5x^4)$$

et si $k \geq 4$, $p_k(x)$ *est le déterminant*

$$\begin{array}{c}
\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k \text{ zéros}} \qquad\qquad\qquad\qquad \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k-1 \text{ zéros}} \\
\left|\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & x & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & x \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x \\
x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x & -2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{array}\right|
\end{array}.$$

(Précisons qu'après les deux premiers éléments de la première colonne de $p_k(x)$ le nombre de zéros est égal à $k-1$).

Démonstration. Etant donné une suite de nombres complexes $a_{-n}, \ldots, a_0, \ldots, a_n$, le déterminant d'ordre $(n+1)$

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\
a_{-2} & a_{-1} & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
a_{-n+2} & a_{-n+3} & \cdots & a_1 & a_2 \\
a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & a_0 & a_1 \\
a_{-n} & a_{-n+1} & \cdots & a_{-1} & a_0
\end{vmatrix}$$

est noté

$$D_{n+1}\begin{pmatrix} & a_1, & a_2, & \cdots, & a_{n-1}, & a_n \\ a_0 & & & & & \\ & a_{-1}, & a_{-2}, & \cdots, & a_{-n+1}, & a_{-n} \end{pmatrix}.$$

Il est connu [12. Theorem 5.1] que

$$
\begin{aligned}
& D_n \begin{pmatrix} & a_2, & a_3, & \cdots & a_{n-1}, & a_n \\ a_1 & & & & & \\ & a_0, & a_{-1}, & \cdots & a_{-n-3}, & a_{-n-2} \end{pmatrix} D_n \begin{pmatrix} & a_0, & a_1, & \cdots & a_{n-3}, & a_{n-2} \\ a_{-1} & & & & & \\ & a_{-2}, & a_{-3}, & \cdots & a_{-n+1}, & a_{-n} \end{pmatrix} \\
+ \; & D_{n-1} \begin{pmatrix} & a_1, & a_2, & \cdots & a_{n-3}, & a_{n-2} \\ a_0 & & & & & \\ & a_{-1}, & a_{-2}, & \cdots & a_{-n+3}, & a_{-n+2} \end{pmatrix} D_{n+1} \begin{pmatrix} & a_1, & a_2, & \cdots & a_{n-1}, & a_n \\ a_0 & & & & & \\ & a_{-1}, & a_{-2}, & \cdots & a_{-n+1}, & a_{-n} \end{pmatrix} \\
= \; & D_n^2 \begin{pmatrix} & a_1, & a_2, & \cdots & a_{n-2}, & a_{n-1} \\ a_0 & & & & & \\ & a_{-1}, & a_{-2}, & \cdots & a_{-n+2}, & a_{-n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Prenant $a_{-j} = \overline{a_j}$, $0 \leq j \leq n$, dans (2.17) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
& \left| D_n^2 \begin{pmatrix} & a_2, & a_3, & \cdots, & a_{n-1}, & a_n \\ a_1 & & & & & \\ & a_0, & \overline{a}_1, & \cdots, & \overline{a}_{n-3}, & \overline{a}_{n-2} \end{pmatrix} \right| \\
& + D_{n-1}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}) \cdot D_{n+1}(a_0, a_1, \ldots, a_n) \\
= \; & D_n^2(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}).
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Dans (2.18) prenons $n = 2k+3$, $a_0 = 2$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1} = 0$, $a_{k+2} = x$, $a_{k+3} = -2x$, $a_{k+4} = x$, où x est réel, $a_{k+5} = a_{k+6} = \cdots = a_n = 0$. Si nous développons

$$
D_n \begin{pmatrix} & a_2, & a_3, & \cdots, & a_{n-1}, & a_n \\ a_1 & & & & & \\ & a_0, & \overline{a}_1, & \cdots, & \overline{a}_{n-3}, & \overline{a}_{n-2} \end{pmatrix}
$$

par sa $(k+1)^{ième}$ colonne et le déterminant ainsi obtenu par sa $(k+3)^{ième}$ ligne nous voyons que

$$
D_n \begin{pmatrix} & a_2, & a_3, & \cdots, & a_{n-1}, & a_n \\ a_1 & & & & & \\ & a_0, & \overline{a}_1, & \cdots, & \overline{a}_{n-3}, & \overline{a}_{n-2} \end{pmatrix} = 4p_k(x).
$$

Ensuite, développant $D_{n-1}(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2})$ successivement par sa $(k+1)^{ième}$ et par sa $(k+2)^{ième}$ ligne nous obtenons

$$D_{n-1}(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}) = 4F_{k-1}(x).$$

De plus, il est évident que

$$D_{n+1}(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = F_{k+1}(x).$$

Finalement, si nous développons $D_n(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1})$ par sa $(k+2)^{ième}$ ligne nous voyons que

$$D_n(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}) = 2F_k(x).$$

Donc (2.18) implique l'identité désirée (2.16).

∎

Rappelons que $c_k^{(j)}$ est la plus petite racine positive du déterminant

$$D(2, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-j \text{ zéros}}, x, -2x, x, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-j-2 \text{ zéros}})$$

qui est d'ordre $2(k-j)+2$; donc $c_k^{(j)} = c_{k-j}^{(0)}$. Ainsi, afin de démontrer (2.15) il suffirait de démontrer que

$$c_k^{(0)} < c_{k-1}^{(0)} < c_{k-2}^{(0)} < \cdots < c_3^{(0)} = 0.5731\ldots < c_2^{(0)} = 0.6320\ldots < c_1^{(0)} = 2(\sqrt{2}-1) < c_0^{(0)} = 2. \qquad (2.19)$$

Cette affirmation est certainement vraie pour $k \leq 3$. Nous allons la vérifier pour tout k par induction. Supposons que (2.19) soit vraie pour tout $k \leq k_0$ mais que $c_{k_0+1}^{(0)} \geq c_{k_0}^{(0)}$; en fait $c_{k_0+1}^{(0)} = c_{k_0}^{(0)}$ par le corollaire 2.1. En vertu de (2.16) nous obtiendrions $p_k(c_k^{(0)}) = 0$, ce qui est une contradiction puisque, comme nous allons le démontrer,

$$(-1)^{k-1} p_k(x) > 0 \quad pour \quad 0 < x < 2. \qquad (2.20)$$

La preuve de (2.20) est basée sur le fait que $p_k(x)$ satisfait une relation de récurrence donnée dans le

LEMME 2.5. *Si* $k \geq 4$ alors nous avons

$$p_k(x) + 2x^2 p_{k-1}(x) - x^2(4 - x^2)p_{k-2}(x) \quad + 4\sum_{\mu=3}^{k-1}(-1)^{\mu-1}(\mu - 1)x^{2\mu-2}p_{k-\mu}(x)$$
$$+ 4(-1)^k(3k-2)x^{2k-1} = 0. \qquad (2.21)$$

Démonstration. Etape numéro 0. Appliquons le lemme D avec $p = 2$, $j_1 = 1$ et $j_2 = k + 1$. Tous les termes dans le développement s'avèrent être nuls sauf lorsque la paire ordonnée (i_1, i_2) est $(1, k+2)$, $(2, k+2)$, $(k+2, k+3)$, $(k+2, k+4)$. Nous obtenons ainsi

$$p_k(x) = -2x^2 p_{k-1}(x) + x^2(4 - x^2)p_{k-2}(x) + (-1)^{k-1}2x^3 \cdot \{$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \overbrace{\hspace{14em}}^{k-2\text{ zéros}} & \qquad \overbrace{\hspace{14em}}^{k-3\text{ zéros}} \end{array}\\
\begin{vmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & x & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & x\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x\\
-4x & 2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & -2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & x & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{vmatrix}
\end{array} +$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \overbrace{\hspace{14em}}^{k-2\text{ zéros}} & \qquad \overbrace{\hspace{14em}}^{k-3\text{ zéros}} \end{array}\\
\begin{vmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & x & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & x\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x\\
x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & -2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & x & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{vmatrix}
\end{array} \}$$

qui. par la propriété de linéarité du déterminant. est égal à

$$-2x^2p_{k-1}(x)+x^2(4-x^2)p_{k-2}(x)+(-1)^{k-1}2x^3.$$

$$\begin{array}{c}
\hphantom{0\;}\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 0\quad 0}}^{k-2\text{ zéros}}\hphantom{\;-2x\;}\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 0\quad 0}}^{k-3\text{ zéros}}
\end{array}$$

$$\begin{vmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & x & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & & \vdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & x\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x\\
-3x & 2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & -2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & x & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{vmatrix}.$$

(Précisons que le nombre de zéros après le premier élément de la première colonne dans chacun des trois déterminants ci-dessus est égal à $k-2$).

Etape numéro ν. $1\leq\nu\leq\left[\frac{k}{2}\right]-2$. Nous appliquons de nouveau le lemme D avec. cette fois-ci. $p=2$. $j_1=1$ et $j_2=2$. Nous remarquons encore une fois que tous les termes dans le développement s'avèrent être nuls sauf lorsque la paire ordonnée (i_1,i_2) est $(1,(k+2)-2\nu),(2,(k+2)-2\nu),((k+2)-2\nu,(k+3)-2\nu),((k+2)-2\nu,(k+4)-2\nu)$. Nous obtenons ainsi. après la $\nu^{ième}$ étape.

$$\begin{aligned}
p_k(x) &= -2x^2p_{k-1}(x)+x^2(4-x^2)p_{k-2}(x)\\
&\quad -4\sum_{\mu=1}^{\nu}\{2\mu x^{4\mu}p_{k-(2\mu+1)}(x)-(2\mu+1)x^{4\mu+2}p_{k-2(\mu+1)}(x)\}+(-1)^{k-1}2x^{4\nu+3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\hphantom{0\;}\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 0\quad 0}}^{k-2(\nu+1)\text{ zéros}}\hphantom{\;-2x\;}\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 0\quad 0}}^{k-2(\nu+1)-1\text{ zéros}}
\end{array}$$

$$\begin{vmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & x & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x & x\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & -2x\\
-(2\nu+3)x & 2(\nu+1)x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & -2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & x & -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{vmatrix}.$$

(Ici, précisons que dans le déterminant ci-dessus, le nombre de zéros après le premier élément de la première colonne est égal à $k - 2(\nu + 1)$).

Si k pair alors à la fin de l'étape $\nu = \left[\frac{k}{2}\right] - 2 = \frac{k}{2} - 2$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
p_k(x) &= -2x^2 p_{k-1}(x) + x^2(4 - x^2)p_{k-2}(x) \\
&\quad -4\sum_{\mu=1}^{\frac{k}{2}-2}\{2\mu x^{4\mu}p_{k-(2\mu+1)}(x) - (2\mu+1)x^{4\mu+2}p_{k-2(\mu+1)}(x)\} \\
&\quad -2x^{2k-5}\cdot\begin{vmatrix}
2 & 0 & 0 & x & 0 \\
0 & 2 & 0 & -2x & x \\
0 & 0 & 2 & x & -2x \\
-(k-1)x & (k-2)x & 0 & 0 & 0 \\
x & -2x & x & 2 & 0
\end{vmatrix} \\
&= -2x^2 p_{k-1}(x) + x^2(4 - x^2)p_{k-2}(x) \\
&\quad -4\sum_{\mu=1}^{\frac{k}{2}-2}\{2\mu x^{4\mu}p_{k-(2\mu+1)}(x) - (2\mu+1)x^{4\mu+2}p_{k-2(\mu+1)}(x)\} \\
&\quad -4x^{2k-5}\{(k-2)xp_1(x) + 2x^4(3k-2)\}.
\end{aligned}$$

Si k est impair alors à la fin de l'étape $\nu = \left[\frac{k}{2}\right] - 2 = \frac{k-5}{2}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
p_k(x) &= -2x^2 p_{k-1}(x) + x^2(4 - x^2)p_{k-2}(x) \\
&\quad -4\sum_{\mu=1}^{\frac{k-5}{2}}\{2\mu x^{4\mu}p_{k-(2\mu+1)}(x) - (2\mu+1)x^{4\mu+2}p_{k-2(\mu+1)}(x)\} \\
&\quad +2x^{2k-7}\begin{vmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & -2x & x & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & x & -2x & x \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & x & -2x \\
-(k-2)x & (k-3)x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x & -2x & x & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & x & -2x & x & 0 & 2 & 0
\end{vmatrix} \\
&= -2x^2 p_{k-1}(x) + x^2(4 - x^2)p_{k-2}(x)
\end{aligned}$$

$$-4\sum_{\mu=1}^{\frac{k-3}{2}}\{2\mu x^{4\mu}p_{k-(2\mu+1)}(x)-(2\mu+1)x^{4\mu+2}p_{k-2(\mu+1)}(x)\}$$
$$+4(3k-2)x^{2k-1}.$$

Les deux expressions que nous avons obtenues pour $p_k(x)$. l'une lorsque k est pair et l'autre lorsque k est impair. peuvent être exprimée comme (2.21).

■

Démontrons maintenant l'affirmation (2.20). Celle-ci est vraie si $k = 2$ puisque $p_2(x) = -4x^3(6+x^3) < 0$ pour $0 < x < 2$. Nous la démontrons par induction pour tout k. Supposons que (2.20) soit vraie pour tout r tel que $1 \leq r < k$ où $k \geq 4$. Par le lemme 2.5,

$$\begin{aligned}(-1)^{k-1}p_k(x) = \;& (-1)^{k-2}2x^2p_{k-1}(x)+(-1)^{k-3}x^2(4-x^2)p_{k-2}(x)\\ &+4\sum_{\mu=3}^{k-1}(-1)^{k-\mu-1}(\mu-1)x^{2\mu-2}p_{k-\mu}(x)+(3k-2)x^{2k-1}.\end{aligned}$$

qui est > 0 si $0 < x < 2$ par l'hypothèse d'induction.
Ceci complète la preuve du théorème 2.2.

2.3. Un résultat complémentaire

Dans cette section nous utilisons la méthode de convolution afin de démontrer le

THEOREME 2.3. Soit $P \in \mathcal{P}_n$. Si $0 \leq x \leq x(n)$ alors

$$||zP'(z)-xa_nz^n|| \leq (n-x)||P|| \tag{2.22}$$

où $x(n)$ est la plus petite racine positive du polynôme

$$
\begin{aligned}
F(n,x) := \quad \tfrac{1}{2} \quad & \{(n-x)\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \begin{pmatrix} n \\ 2j \end{pmatrix} (1-2x)^j(1-x)^{n-2j} \\
- \quad & ((n+1)x-n) \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \begin{pmatrix} n \\ 2j+1 \end{pmatrix} (1-2x)^j(1-x)^{n-2j-1} \\
+ \quad & (-1)^{n+1}x^{n+1}\}.
\end{aligned}
$$

Démonstration. Remarquons qu'après avoir divisé (2.22) par $n-x$ cette inégalité s'exprime sous la forme

$$||P * Q|| \leq ||P||$$

où

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{n-x} z^j + z^n.$$

En vertu du lemme A et de (1.5) il s'agit maintenant de trouver les valeurs de x pour lesquelles

$$\dot{Q}_\alpha(z) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{n-x} z^j$$

appartient à $\mathcal{B}_n^0$ ou, de façon équivalente, trouver les valeurs de x pour lesquelles la matrice

$$M(n-x, n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0) \tag{2.23}$$

est semi-définie positive. Au lieu de faire appel au lemme B nous allons plutôt utiliser un autre critère à cette fin, celui de trouver les valeurs de x pour lesquelles les valeurs propres de (2.23) sont positives.

Les valeurs propres λ de (2.23) sont les racines de l'équation $F(n, x+\lambda) = 0$ où

$$F(n,x) := D(n-x, n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0). \tag{2.24}$$

Celles-ci sont toutes réelles (voir la preuve du lemme 2.3). Si $x_k(n), k = 0, 1, \ldots, n$ sont les racines du polynôme $F(n, x)$ alors les valeurs propres $\lambda_k(n), k = 0, 1, \ldots, n$ de (2.23) ont la forme

$$\lambda_k(n) = x_k(n) - x \quad (x > 0). \tag{2.25}$$

Maintenant, si nous démontrons que tous les $x_k(n)$ sont positifs alors nous pourrons affirmer en vertu de (2.25) que tous les $\lambda_k(n)$ seront positifs si $x < \min_{0 \leq k \leq n} x_k(n)$. Pour étudier le signe des $x_k(n), k = 0, 1, \ldots, n$ nous sommes obligés d'écrire $F(n, x)$ plus explicitement. A cette fin, prenons la matrice (2.23) et effectuons sur ses lignes les opérations élémentaires suivantes dans le but de la triangulariser. Partons plutôt avec (2.24) et

(i) soustrayons sa $(i+1)^{i\grave{e}me}$ ligne de sa $i^{i\grave{e}me}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) De la nouvelle $(i+1)^{i\grave{e}me}$ ligne soustrayons sa nouvelle $i^{i\grave{e}me}$ ligne, pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

(iii) *Etape 1.* Dans le déterminant que nous venons d'obtenir posons $y_1 := a_{n+1,2} (= 1)$, $z_1 := a_{n+1,3} (= 2)$. Maintenant soustrayons $\frac{y_1}{x}$ fois la troisième ligne de la $(n+1)^{i\grave{e}me}$.

Etape 2. Posons $y_2 := a_{n+1,3} \left(= z_1 - \frac{2-2x}{x} y_1\right)$, $z_2 := a_{n+1,4} (= 3 - y_1)$ dans le déterminant résultant. De la $(n+1)^{i\grave{e}me}$ ligne soustrayons $\frac{y_2}{x}$ fois la quatrième.

Etape ν, $3 \leq \nu \leq n-2$. Dans le déterminant obtenu à l'étape précédante posons $y_\nu := a_{n+1,\nu+1} (= z_{\nu-1} - \frac{2-2x}{x} y_{\nu-1})$, $z_\nu := a_{n+1,\nu+2} (= (\nu+1) - y_{\nu-1})$. Ensuite soustrayons $\frac{y_\nu}{x}$ fois la $(\nu+2)^{i\grave{e}me}$ ligne de la $(n+1)^{i\grave{e}me}$.

A la fin de la $(n-2)^{ième}$ étape nous obtenons

$$\mathrm{F(n,x)} = \begin{vmatrix} 1-x & x-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ x & 2-2x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 2-2x & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 2-2x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-2x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 2-2x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 2-2x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & y_{n-1} & z^*_{n-1} \end{vmatrix}$$

où $y_{n-1} = z_{n-2} - \frac{2-2x}{x} y_{n-2}$ *et* $z^*_{n-1} = (n-x) - y_{n-2}$.

(iv) Ajoutons la deuxième ligne à la première. Ensuite soustrayons x fois la nouvelle première ligne de la deuxième.

(v) *Etape 1.* Se référant au déterminant résultant posons $\alpha_1 := a_{22}$ $(= (x-1)(x-2))$, $\beta_1 := a_{23}$ $(= x(2-x))$. Puis de la troisième ligne soustrayons $\frac{x}{\alpha_1}$ fois la deuxième.

Etape 2. Posons dans le déterminant obtenu précédemment
$\alpha_2 := a_{33}$ $\left(= 2 - 2x - \frac{\beta_1}{\alpha_1}x\right)$, $\beta_2 := a_{34}$ $\left(= x - \frac{x^2}{\alpha_1}\right)$. Soustrayons ensuite $\frac{x}{\alpha_2}$ fois la troisième ligne de la quatrième.

Etape ν, $3 \leq \nu \leq n-2$. Dans le déterminant obtenu à l'étape précédante posons
$\alpha_\nu := a_{\nu+1,\nu+1}$ $\left(= 2 - 2x - \frac{\beta_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-1}}x\right)$, $\beta_\nu := a_{\nu+1,\nu+2}$ $\left(= x + (-1)^{\nu-1}\frac{x^\nu}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\nu-1}}\right)$.
Puis nous soustrayons $\frac{x}{\alpha_\nu}$ fois la $(\nu+1)^{ième}$ ligne de sa $(\nu+2)^{ième}$.

Etape n-1. Après avoir posé $\alpha_{n-1} := a_{nn}$ $\left(= 2 - 2x - \frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{\nu-2}}x\right)$,
$\beta_{n-1} := a_{n,n+1}$ $\left(= x + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-2}}\right)$ soustrayons $\frac{y_{n-1}}{\alpha_{n-1}}$ fois la $n^{ième}$ ligne

de la $(n+1)^{i\grave{e}me}$. Ainsi

$$\mathrm{F(n,x)} = \begin{vmatrix} 1 & 1-x & x-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & x & x & \cdots & x & x & x & x \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \frac{-x^2}{\alpha_1} & \cdots & \frac{-x^2}{\alpha_1} & \frac{-x^2}{\alpha_1} & \frac{-x^2}{\alpha_1} & \frac{-x^2}{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \cdots & \frac{x^3}{\alpha_1\alpha_2} & \frac{x^3}{\alpha_1\alpha_2} & \frac{x^3}{\alpha_1\alpha_2} & \frac{x^3}{\alpha_1\alpha_2} \\ . & . & . & . & . & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-3} & \beta_{n-3} & \frac{(-1)^{n-4}x^{n-3}}{\alpha_1\cdots\alpha_{n-4}} & \frac{(-1)^{n-4}x^{n-3}}{\alpha_1\cdots\alpha_{n-4}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-2} & \beta_{n-2} & \frac{(-1)^{n-3}x^{n-2}}{\alpha_1\cdots\alpha_{n-3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \beta^*_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\beta^*_{n-1} \tag{2.26}$$

où $\alpha_1 = (x-1)(x-2)$, $\beta_1 = x(2-x)$ et pour $2 \leq k \leq n-1$,

$$\alpha_k = (2-2x) - \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}}x, \tag{2.27}$$

$$\beta_k = x + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-1}}. \tag{2.28}$$

$$\beta^*_{n-1} = z^*_{n-1} - \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}y_{n-1}, \tag{2.29}$$

$$z^*_{n-1} = (n-x) - y_{n-2}. \tag{2.30}$$

Si

$$y_k = z_{k-1} - \frac{2-2x}{x}y_{k-1} \quad (2 \leq k \leq n-1) \quad \text{où} \quad z_k = (k+1) - y_{k-1} \quad (2 \leq k \leq n-2)$$

avec $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $z_0 = 1$, $z_1 = 2$ nous obtenons

$$y_k = \frac{(x-1-\sqrt{1-2x})^{k+1} - (x-1+\sqrt{1-2x})^{k+1}}{4\sqrt{1-2x}\,x^{k-1}} + \frac{x}{2}(k+1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.31}$$

Maintenant si

$$\gamma_k := \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

alors en vertu de (2.27) et (2.28) nous voyons que γ_k satisfait la relation de récurrence

$$\gamma_k - (2-2x)\gamma_{k-1} + x^2\gamma_{k-2} = (-1)^{k+1}x^k \quad (2 \leq k \leq n-1)$$

avec $\gamma_0 := 1 - x, \gamma_1 = \alpha_1 = (x-1)(x-2)$, dont la solution générale est

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{2-3x+(2-x)\sqrt{1-2x}}{4\sqrt{1-2x}}(1-x+\sqrt{1-2x})^k \\ &+\frac{3x-2+(2-x)\sqrt{1-2x}}{4\sqrt{1-2x}}(1-x-\sqrt{1-2x})^k + \frac{(-x)^{k+1}}{2}, \quad k = 0,1,2,\dots\ .\end{aligned} \tag{2.32}$$

Maintenant en vertu de (2.26), (2.29) et (2.30) nous obtenons

$$\begin{aligned}F(n,x) &= \gamma_{n-1}\left\{(n-x) - y_{n-2} - \frac{\beta_{n-1}y_{n-1}}{\alpha_{n-1}}\right\} \\ &= \gamma_{n-2}\{((n-x)-y_{n-2})\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}y_{n-1}\} \\ &= ((n-x)-y_{n-2})\gamma_{n-1} - xy_{n-1}\gamma_{n-2} + (-1)^{n+1}x^{n+1}y_{n-1}.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Substituant (2.31) et (2.32) dans (2.33) et faisant appel au logiciel Mathematica, il vient,

$$\begin{aligned}F(n,x) &= \frac{1}{4\sqrt{1-2x}}[\{(1-x)-\sqrt{1-2x}\}^n\{(n-x)\sqrt{1-2x}+(n+1)x-n\} \\ &+ \{(1-x)+\sqrt{1-2x}\}^n\{(n-x)\sqrt{1-2x}-(n+1)x+n\} \\ &+ 2(-1)^{n+1}x^{n+1}\sqrt{1-2x}] \\ &= \frac{1}{2}\{(n-x)\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2j}(1-2x)^j(1-x)^{n-2j} \\ &- ((n+1)x-n)\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2j+1}(1-2x)^j(1-x)^{n-2j-1} \\ &+ (-1)^{n+1}x^{n+1}\}.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Rappelons que nous voulons démontrer que toutes les racines $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $F(n, x)$ sont positives. Mais ceci est maintenant clair puisqu'en vertu de (2.34) nous avons $F(n, -|x|) > 0$. Donc si $x < \min_{0 \leq k \leq n} x_k$ alors de (2.25) toutes les valeurs propres $\lambda_k(n), k = 0, 1, \ldots, n$ sont positives, i.e. la matrice (2.23) est définie positive.

■

CHAPITRE 3

QUELQUES RÉSULTATS CONCERNANT LE MODULE MAXIMUM D'UN POLYNÔME

3.1 Un résultat asymptotique

3.1.1 Introduction et énoncé du résultat asymptotique

Soit $P \in \mathcal{P}_n$. Dans [8] la méthode de convolution a été utilisée afin de trouver, pour $k = 0$ et $k = 1$, le plus grand nombre $d_{n,k}(R)$, $R \geq 1$, tel que

$$M_P(R) + d_{n,k}(R)|a_k| \leq R^n ||P|| \quad \textit{pour tout } P \in \mathcal{P}_n. \tag{3.1}$$

Rappelons (voir l'introduction) que si $n \geq 2$

$$d_{n,0}(R) = R^n - R^{n-2} \tag{3.2}$$

et si $n \geq 4$

$$d_{n,1}(R) = (R^n - R^{n-2})\left(\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}} - \frac{1}{R}\right).$$

Ici nous allons étudier le problème pour les autres valeurs de $k \in \mathbb{N}$. Plus précisément nous montrerons que $d_{n,k}(R)$ s'écrit toujours sous la forme

$$(R^n - R^{n-2})(1 - f_k(R))$$

où $f_k(R) \geq 0$ ne dépend pas de n. Un problème intéressant consiste alors à étudier le comportement asymptotique de $f_k(R)$ lorsque $R \to \infty$.

Afin de déterminer $d_{n,k}(R)$ nous divisons les deux côtés de (3.1) par R^n et remarquons que

$$\frac{1}{R^n}(M_P(R) + d_{n,k}(R)|a_k|) = \sup_{|\alpha| < d_{n,k}(R)} ||Q * P||$$

où

$$Q(z) = Q_\alpha(z) := \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} \frac{R^j}{R^n} z^j + \frac{R^k + \overline{\alpha}}{R^n} z^k.$$

Il suffit alors de démontrer que $Q_\alpha \in \mathcal{B}_n$ si $|\alpha| < d_{n,k}(R)$ ou, de façon équivalente, nous pouvons démontrer que $\tilde{Q}_\alpha$ appartient à $\mathcal{B}_n^0$ si $|\alpha| < d_{n,k}(R)$.

Par le Lemme A, l'inégalité $||\tilde{Q}_\alpha * P|| \leq ||P||$ est satisfaite pour tout $P \in \mathcal{P}_n$ et $|\alpha| \leq d_{n,k}(R)$ si et seulement si la matrice

$$M(R^n, R^{n-1}, \ldots, R^{k+1}, R^k + \alpha, R^{k-1}, \ldots, R^2, R, 1) \tag{3.3}$$

est semi-définie positive pour $|\alpha| \leq d_{n,k}(R)$. Maintenant par le Lemme B, $d_{n,k}(R)$ peut être vu comme étant le *plus grand* nombre $\xi_{n,k}(R)$ tel que *tous* les mineurs principaux de (3.3) soient positifs pour tout α dans $|z| < \xi_{n,k}(R)$. Les mineurs principaux d'ordre inférieur à $n-k$ ne dépendent pas de α et sont tous positifs en vertu de (0.10). Ainsi ce sont les mineurs principaux de (3.3) d'ordre $\geq n-k+1$ que nous devons étudier de plus près. Cependant, tout comme pour la constante $c_{1,k}(n)$ $(3 \leq k \leq n)$, la détermination de la valeur exacte de $\xi_{n,k}(R)$, i.e. $d_{n,k}(R)$, est difficile et nous étudierons son comportement asymptotique. Pour être plus précis nous démontrons le

THEOREME 3.1 [4]. *Soit $d_{n,k}(R)$ la constante apparaissant dans (3.1). Si $n \geq 2k+2$ alors*

$$d_{n,k}(R) = (R^n - R^{n-2})(1 - f_k(R)), \quad R \geq 1,$$

où $0 \leq f_k(R) \leq 1$ est indépendant de n. De plus

$$\lim_{R \to \infty} R f_k(R) = 2\cos\left(\frac{\pi}{k+2}\right), \quad k \geq 0.$$

3.1.2 Résultats auxilliaires

Pour la démonstration du théorème ci-dessus nous aurons besoin de quelques résultats auxilliaires qui sont présentés dans cette section.

LEMME 3.1. *Si* $0 \leq j \leq k \leq n$, *alors*

$$d_{n,k,j}(R;\alpha) \equiv R^{n-j+1} d_{n-1,k-1,j-1}(R;\frac{\alpha}{R}) \qquad (\alpha \in \mathbb{C}) \tag{3.4}$$

où

$$d_{n,k,j}(R;\alpha) := D(R^n, R^{n-1}, \dots, R^{k+1}, R^k + \alpha, R^{k-1}, \dots, R^j).$$

La preuve du lemme ci-dessus est immédiate. Appliquant (3.4) de manière récursive nous obtenons le

COROLLAIRE 3.1. *Si* $0 \leq j \leq k \leq n$ *alors*

$$d_{n,k,j}(R;\alpha) \equiv R^{j(n-j+1)} d_{n-j,k-j,0}(R;\frac{\alpha}{R^j}).$$

Comme autre conséquence du lemme 3.1 mentionnons le

COROLLAIRE 3.2. *Si* $n \geq k$ *alors*

$$d_{n,k}(R) \leq R^n - R^{n-2}, \quad R \geq 1. \tag{3.5}$$

Démonstration. Il suit du lemme 3.1 que

$$d_{n,k}(R) \leq R d_{n-1,k-1}(R) \quad \textit{pour} \quad 1 \leq k \leq n. \tag{3.6}$$

Appliquant (3.6) de façon récursive, puis utilisant (3.2), nous obtenons (3.5) si $n \geq k+2$. Les cas $n = k+1$ et $n = k$ sont évidents puisque $d_{1,0}(R) = R-1$ et $d_{0,0}(R) = 0$.

∎

Notre prochain lemme est crucial pour l'étude du comportement asymptotique de $d_{n,k}(R)$. Sa preuve est analogue a celle du lemme 2.3.

LEMME 3.2. *Soient* $0 \leq j \leq k \leq n$, $R \geq 1$. *Les racines* λ *de l'équation*

$$d_{n,k,j}(R;\lambda) = 0$$

sont réelles.

3.1.3. Démonstration du résultat asymptotique

Rappelons qu'afin d'étudier le comportement asymptotique de $d_{n,k}(R)$ nous sommes amenés à étudier le signe des mineurs principaux d'ordre $\geq n-k+1$ de la matrice (3.3) où, en vertu du corollaire 3.1, celui de la matrice

$$M(R^m, R^{m-1}, \ldots, R^{s+1}, R^s+\gamma, R^{s-1}, \ldots, R^2, R, 1) \tag{3.7}$$

où $m = n-j, s = k-j, \gamma = \alpha/R^j$. A l'aide d'opérations élémentaires nous allons réduire le déterminant de (3.7) à un déterminant qui est plus facile à manipuler et qui nous conduira au résultat désiré. Prenons (3.7) pour $s \geq 3$ et

(i) soustrayons $1/R$ fois sa $(i+1)^{ième}$ ligne de sa $i^{ième}$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$. Puis

(ii) pour $i = 1, 2, \ldots, m$ divisons la $i^{ième}$ ligne by R^2-1.

(iii) Dans le déterminant ainsi obtenu soustrayons $1/R$ fois la $(l+1)^{ième}$ colonne de sa $l^{ième}$ pour $l = 1, 2, \ldots, m$.

(iv) Remarquons maintenant que pour $m \geq 2s+2$ chacune des lignes numéros $s+2$ à $m-s-1$ du déterminant résultant contient un seul élément non nul et celui-ci est égal à R^{m-2}. Développant ce déterminant par ces $m-2s-2$ lignes l'une à la suite de l'autre donne

$$\begin{aligned} &D(R^m, R^{m-1}, \ldots, R^{s+1}, R^s+\gamma, R^{s-1}, \ldots, R^2, R, 1) \\ &= R^{(m-2)(m-2s-2)}(R^2-1)^m |[c_{\mu,\nu}]|_{1\leq\mu,\nu\leq 2s+3}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

où, pour $1 \leq \mu \leq s$,

$$c_{\mu,\nu} = \begin{cases} R^{m-2} & \text{si } \nu = \mu \\ -\gamma/R(R^2-1) & \text{si } \nu = \mu+s+1 \\ (R^2+1)\gamma/R^2(R^2-1) & \text{si } \nu = \mu+s+2 \\ -\gamma/R(R^2-1) & \text{si } \nu = \mu+s+3 \\ 0 & \text{sinon:} \end{cases}$$

$$c_{s+1,\nu} = \begin{cases} R^{m-2} & \text{si } \nu = s+1 \\ -\gamma/R(R^2-1) & \text{si } \nu = 2s+2 \\ \gamma/(R^2-1) & \text{si } \nu = 2s+3 \\ 0 & \text{sinon:} \end{cases}$$

pour $s+2 \leq \mu \leq 2s+2$.

$$c_{\mu,\nu} = \begin{cases} -\overline{\gamma}/R(R^2-1) & \text{si } \nu = \mu - s - 3 \\ (R^2+1)\overline{\gamma}/R^2(R^2-1) & \text{si } \nu = \mu - s - 2 \\ -\overline{\gamma}/R(R^2-1) & \text{si } \nu = \mu - s - 1 \\ R^{m-2} & \text{si } \nu = \mu \\ 0 & \text{sinon:} \end{cases}$$

(ici. et dans ce qui suit. il n'y a pas de termes si $\nu \leq 0$).

$$c_{2s+3,\nu} = \begin{cases} -\overline{\gamma}/R & \text{si } \nu = s \\ \overline{\gamma} & \text{si } \nu = s+1 \\ R^m & \text{si } \nu = 2s+3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(v) Dans (3.8) posons $\gamma = \beta(R^m - R^{m-2})$. Ensuite

(vi) divisons la $i^{ième}$ ligne par R^{m-4} pour $i = 1, 2, \ldots, 2s+3$. Puis factorisons R des colonnes $s+1, s+2$ et $2s+3$. Ensuite nous effectuons la même opération mais cette fois sur les lignes $s+1, s+2$ et $2s+3$. Le déterminant ainsi obtenu est de la forme $F(|\beta|^2)$ où F est un polynôme. Pour le voir, multiplions tout simplement les $s+1$ premières colonnes par β puis divisons les $s+1$ premières lignes par la même quantité. Son minimum est donc indépendent de $arg(\beta)$. De plus, remarquons qu'il est indépendent de n. Maintenant, si nous divisons la dernière ligne par R^2-1 alors

$$\begin{aligned} &D(R^m, R^{m-1}, \ldots, R^{s+1}, R^s + \gamma, R^{s-1}, \ldots, R^2, R, 1) \\ &= R^{m^2-m-4s-2}(R^2-1)^{m+1}|[c'_{\mu,\nu}]|_{1\leq\mu,\nu\leq 2s+3} \qquad (3.9) \end{aligned}$$

où, posant $x := |\beta|$,

$$c'_{1,\nu} = \begin{cases} R^2 & \text{si } \nu = 1 \\ -1 & \text{si } \nu = s+2 \\ R^2+1 & \text{si } \nu = s+3 \\ -R & \text{si } \nu = s+4 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

pour $2 \leq \mu \leq s-1$,

$$c'_{\mu,\nu} = \begin{cases} R^2 & \text{si } \nu = \mu \\ -R & \text{si } \nu = \mu+s+1 \\ R^2+1 & \text{si } \nu = \mu+s+2 \\ -R & \text{si } \nu = \mu+s+3 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c'_{s,\nu} = \begin{cases} R^2 & \text{si } \nu = s \\ -R & \text{si } \nu = 2s+1 \\ R^2+1 & \text{si } \nu = 2s+2 \\ -1 & \text{si } \nu = 2s+3 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c'_{s+1,\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = s+1 \\ -1 & \text{si } \nu = 2s+2 \\ 1 & \text{si } \nu = 2s+3 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c'_{s+2,\nu} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } \nu = 1 \\ 1 & \text{si } \nu = s+2 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

pour $s+3 \leq \mu \leq 2s+1$.

$$c'_{\mu,\nu} = \begin{cases} -Rx^2 & \text{si } \nu = \mu - s - 3 \\ (R^2+1)x^2 & \text{si } \nu = \mu - s - 2 \\ -Rx^2 & \text{si } \nu = \mu - s - 1 \\ R^2 & \text{si } \nu = \mu \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c'_{2s+2,\nu} = \begin{cases} -Rx^2 & \text{si } \nu = s - 1 \\ (R^2+1)x^2 & \text{si } \nu = s \\ -x^2 & \text{si } \nu = s+1 \\ R^2 & \text{si } \nu = 2s+2 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c'_{2s+3,\nu} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } \nu = s \\ x^2 & \text{si } \nu = s+1 \\ R^2/(R^2-1) & \text{si } \nu = 2s+3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A cette étape de la preuve nous pouvons affirmer que

$$d_{n,k}(R) = (R^n - R^{n-2}) \min_{0 \leq j \leq k} X_{j,k}(R), \tag{3.10}$$

où $X_{j,k}(R) := 1 - f_{j,k}(R)$ est la plus petite racine positive de (3.9) et $X_{j,k}(R)$ est indépendant de n. Soit $\min_{0 \leq j \leq k} X_{j,k}(R) =: 1 - f_k(R)$, de telle sorte qu'en vertu du corollaire 3.2, $0 \leq f_k(R) \leq 1$, où $f_k(R)$ est indépendant de n.

Nous allons maintenant étudier le comportement asymptotique de $f_k(R)$. A cette fin prenons le déterminant dans (3.9) et

(vii) soustrayons sa $i^{ième}$ ligne de sa $(s+i+2)^{ième}$ ligne pour $i = 1, 2, \ldots, s$. Ensuite, pour ces mêmes valeurs de i divisons la $(s+i+2)^{ième}$ ligne par R.

(viii) Soustrayons la nouvelle $(s+1)^{ième}$ colonne de la nouvelle $(2s+3)^{ième}$ colonne. Puis nous divisons la $i^{ième}$ ligne par R^2 pour $i = 1, 2, \ldots, s$. Dans le déterminant ainsi obtenu multiplions la $(2s+3)^{ième}$ colonne par R. Ainsi

$$D(R^m, R^{m-1}, \ldots, R^{s+1}, R^s+\gamma, R^{s-1}, \ldots, R^2, R, 1)$$
$$= R^{m^2-m-s-3}(R^2-1)^{m+1}|[c''_{\mu,\nu}]|_{1\leq\mu,\nu\leq 2s+3}, \tag{3.11}$$

où

$$c''_{1,\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = 1 \\ -1/R^2 & \text{si } \nu = s+2 \\ (R^2+1)/R^2 & \text{si } \nu = s+3 \\ -1/R & \text{si } \nu = s+4 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

pour $2 \leq \mu \leq s$,

$$c''_{\mu,\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \mu \\ -1/R & \text{si } \nu = \mu+s+1 \\ (R^2+1)/R & \text{si } \nu = \mu+s+2 \\ -1/R & \text{si } \nu = \mu+s+3 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c''_{s+1,\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = s+1 \\ -1 & \text{si } \nu = 2s+2 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c''_{s+2,\nu} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } \nu = 1 \\ 1 & \text{si } \nu = s+2 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c''_{s+3,\nu} = \begin{cases} Y & \text{si } \nu = 1 \\ -x^2 & \text{si } \nu = 2 \\ 1/R & \text{si } \nu = s+2 \\ -1/R & \text{si } \nu = s+3 \\ 1 & \text{si } \nu = s+4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $Y := R(x^2 - 1) + x^2/R$. Pour $s + 4 \leq \mu \leq 2s + 1$.

$$c''_{\mu,\nu} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } \nu = \mu - s - 3 \\ Y & \text{si } \nu = \mu - s - 2 \\ -x^2 & \text{si } \nu = \mu - s - 1 \\ 1 & \text{si } \nu = \mu - 1 \\ -1/R & \text{si } \nu = \mu \\ 1 & \text{si } \nu = \mu + 1 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c''_{2s+2,\nu} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } \nu = s - 1 \\ Y & \text{si } \nu = s \\ -x^2/R & \text{si } \nu = s + 1 \\ 1 & \text{si } \nu = 2s + 1 \\ -1/R & \text{si } \nu = 2s + 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } \nu = 2s + 3 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$c''_{2s+3,\nu} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } \nu = s \\ x^2 & \text{si } \nu = s + 1 \\ R(1 - x^2) + R/(R^2 - 1) & \text{si } \nu = 2s + 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ix) Dans (3.11) posons $x = 1 - (c/R)$. En vertu du lemme 3.2 les racines du polynôme (3.11) sont réelles. Par le théorème de Hurwitz,

$$\lim_{R \to \infty} R f_{j,k}(R) =: d_{j,k},$$

où $d_{j,k}$ est la racine positive, la plus proche de 1, du polynôme limite

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \hspace{2em} & \overbrace{\hspace{18em}}^{s+1\ \text{zéros}} & \overbrace{\hspace{12em}}^{s\ \text{zéros}} \end{array} \\
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
-2c & -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -2c & -1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -2c & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & -2c & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & -1 & -2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 2c
\end{vmatrix}
\end{array}, \tag{3.12}$$

que nous notons G(c) (en précisant que le nombre de zéros après le premier élément de la première colonne est égal à s). Ce polynôme est égal à $2c$ si $s = 0$, à $4(c^2 - 1)$ si $s = 1$ et à $8(c^3 - 2c)$ si $s = 2$. Notre objectif maintenant est de calculer la valeur de $d_{j,k}$. A cette fin nous simplifions le déterminant apparaissant dans (3.12) en

(x) lui soustrayant sa $(s+l+2)^{ième}$ colonne de sa $l^{ième}$, pour $l = 1, 2, ..., s$. Nous remarquons maintenant que les lignes numéros 1 à s du déterminant ainsi obtenu ont exactement un seul élément non-nul, celui-ci étant égal à 1. Nous développons le déterminant par ces lignes l'une après l'autre et dans le déterminant d'ordre $s+3$ résultant nous

(xi) soustrayons sa $(s+1)^{ième}$ colonne de sa $s^{ième}$. Finalement, développant le déterminant par sa première ligne et ensuite par sa $(s+2)^{ième}$ colonne nous obtenons

$$G(c) = 2^{k-j+1} \cdot D(c, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{\text{k−j−1 zéros}}). \tag{3.13}$$

Mais le déterminant apparaissant dans (3.13) n'est rien d'autre que (1.6) où $b_1 = \frac{1}{c}$ et $r = k - j + 1$. En vertu de (1.7) $G(c) = 0$ si et seulement si $c = 2cos(\frac{\nu\pi}{k-j+2})$,

$0 < \nu < k - j + 2$. Ainsi $d_{j,k} = 2cos(\frac{\pi}{k-j+2})$. Donc

$$\lim_{R \to \infty} Rf_k(R) = \max_{0 \le j \le k} d_{j,k} = 2cos\left(\frac{\pi}{k+2}\right).$$

ce qui complète la preuve du théorème 3.1.

■

3.1.4. Quelques remarques

Dans cette section nous présentons des résultats supplémentaires qui sont des conséquences de la preuve du théorème 3.1.

Puisque la quantité $\min_{0 \le j \le k} X_{j,k}(R)$, apparaissant dans (3.10), est indépendante de n, nous obtenons

$$d_{n+1,k}(R) = Rd_{n,k}(R), \quad n \ge 2k + 2.$$

Ce résultat en conjonction avec (3.6) donne

$$d_{n,k}(R) \le d_{n,k-1}(R), \quad n \ge 2k + 2.$$

Une autre constatation intéressante est celle qui fait un lien entre $d_{n,k}(R)$ et la constante c_k apparaissant dans l'énoncé du théorème 2.2: écrivons (3.1) sous la forme

$$\frac{M_P(R) - M_P(1)}{R-1} + \frac{d_{n,k}(R)}{R-1}|a_k| \le \frac{R^n - 1}{R-1}||P||, \quad R > 1.$$

Nous allons montrer que $\lim_{R \to 1} \frac{d_{n,k}(R)}{R-1} =: v_k$ existe, au moins pour $n \ge 2k + 2$. Ainsi, pourvu que $M'_P(1)$ existe nous obtiendrons

$$M'_P(1) + v_k|a_k| \le n||P||. \tag{3.14}$$

Il suit de (3.10) que pour $n \ge 2k + 2$,

$$v_k = 2 \lim_{R \to 1}(\min_{0 \le j \le k} X_{j,k}(R)) = 2 \min_{0 \le j \le k}(\lim_{R \to 1} X_{j,k}(R))$$

si $\lim_{R\to 1} X_{j,k}(R)$ existe pour $0 \leq j \leq k$. Mais si nous multiplions la dernière colonne de (3.9) par $R^2 - 1$, ensuite faisons tendre R vers 1, puis développons le déterminant ainsi obtenu par sa dernière ligne nous voyons que $\lim_{R\to 1} X_{j,k}(R) =: \psi_k^{(j)}$ est la plus petite racine positive de l'équation

$$D(1,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k-j \text{ zéros}},-x,2x,-x,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k-j-2 \text{ zéros}}) = 0.$$

Mais $\min_{0\leq j\leq k} \psi_k^{(j)} = \psi_k^{(0)}$ (voir (2.15)) et nous déduisons que $\psi_k = c_k$. Ainsi, appliquant (3.14) au polynôme $P(\rho z)$, $\rho > 0$, nous obtenons le résultat suivant. *Soient $P \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 2k+2$, et $\rho > 0$; si $M_P'(\rho)$ existe alors*

$$\rho M_P'(\rho) + c_k|a_k|\rho^k \leq nM_P(\rho),$$

où c_k est la constante définie dans le théorème 2.2.

3.2. Inégalités avec contraintes sur le polynôme

3.2.1. Préliminaires et énoncés des résultats

Afin de présenter notre résultat concernant les polynômes de degré 3 nous devons introduire certaines notations et faire quelques observations. Soit $g(R) := 4 - 3R + 8R^2 - 8R^3 - 4R^5$. Alors

$$g'(R) = (-3 + 16R) - 24R^2 - 20R^4 < 0 \quad pour \quad 0 \leq R \leq \frac{3}{16}.$$

Ecrivant $g'(R)$ sous la forme

$$g'(R) = -3\left(1 - 5R + \frac{25}{4}R^2\right) + R - \frac{21}{4}R^2 - 20R^4$$

nous voyons que

$$\begin{aligned} g'(R) &= -3\left(1 - \frac{5}{2}R\right)^2 + R\left(1 - \frac{21}{4}R - 20R^3\right) \\ &\leq R\left(1 - \frac{21}{4}R - 20R^3\right) \\ &< 0 \quad pour \quad \frac{3}{16} < R < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi $g'(R) < 0$ pour $0 \leq R < \infty$, i.e. $g(R)$ décroît lorsque R croît sur $[0, \infty)$. Puisque

$$g(0) = 4 > 0, \quad g(1) = -3 < 0$$

nous déduisons que g a un et un seul zéro positif R_+. Un calcul numérique montre qu'il est égal à 0.879614879.

De plus, soit $h(R) := 1 + R - R^2 + 2R^3 - 6R^4$. Puisque $h''(R) = -2(1 - 6R + 36R^2) = -2\left\{\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - 6R\right)^2\right\}$ est négatif, h a soit deux zéros réels soit aucun zéro réel. Mais

$$h(-1) < 0, \quad h(0) > 0, \quad h(1) < 0$$

et donc h a un zéro dans $(-1, 0)$ et un zéro dans $(0, 1)$. Notons R_* (≈ 0.767591879) l'unique zéro positif de h.

Pour chaque $R \in (0, 1]$, soit $\lambda(R) := \frac{2-R+\sqrt{(2-R)(2+3R+8R^3)}}{2(1+2R^2)}$. Nous constatons que $\lambda(R) \geq R$ si et seulement si

$$4 - 3R + 8R^2 - 8R^3 - 4R^5 \geq 0,$$

i.e. si et seulement si

$$0 \leq R \leq R_+.$$

Ainsi

$$\lambda_+(R) := min\{R, \lambda(R)\} = \begin{cases} R & \text{si } 0 < R \leq R_+ \\ \lambda(R) & \text{si } R_+ < R \leq 1. \end{cases}$$

En outre, nous pouvons facilement voir que

$$\lambda_*(R) := min\{1, \lambda(R)\} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < R \leq R_* \\ \lambda(R) & \text{si } R_* < R \leq 1. \end{cases} \tag{3.15}$$

De plus, pour $R \in (0, 1)$, soit

$$\mu(r, a) := \frac{1 + (1 - 4a^2)r^2 + 2ar^3}{1 + (1 - 4a^2)R^2 + 2aR^3}, \quad \left(0 \leq a \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1\right).$$

et

$$c_R(r) := \begin{cases} \frac{r+R-\sqrt{(r+R)^2-r^2R^2(r^2+R^2+rR+r^2R^2)}}{2r^2R^2} & \text{si } 0 < r \leq \lambda_*(R) \\ \frac{R}{4} & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

Remarquons que $c_R(r) \leq \frac{1}{2}$ pour $0 \leq r < \lambda_*(R)$.

Pour $0 \leq r, R \leq 1$ soit

$$\phi(R;r) := \frac{1+r^2}{1+R^2} - \frac{1+r^3}{1+R^3}.$$

Alors $\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{R}{(1+R^2)(1+R^3)}(2-3R-R^3)$ a un zéro positif $R_0 \approx 0.596071637$.

LEMME 3.3. Si $R_0 \leq R \leq 1$ alors pour $R < r \leq 1$:

$$min\left\{\frac{1+r^2}{1+R^2}, \frac{1+r^3}{1+R^3}\right\} = \frac{1+r^2}{1+R^2}.$$

Preuve. Si $R_0 < R \leq 1$, alors $\phi(R;-\infty) = +\infty$, $\phi(R;0) < 0$, $\phi(R;1) < 0$, $\phi(R;R) = 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=R} < 0$ *et* $\phi(R;+\infty) = -\infty$. Donc $\phi(R;r) < 0$ pour $r \in (R,1]$.

Si $R = R_0$, alors $\phi(R;-\infty) = +\infty$, $\phi(R;0) < 0$, $\phi(R;1) < 0$, $\phi(R;R) = 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0$, $\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\Big|_{r=R} < 0$ *et* $\phi(R;+\infty) = -\infty$. Donc, nous avons de nouveau $\phi(R;r) < 0$ pour $r \in (R,1]$.

■

Notre résultat peut maintenant s'énoncer comme suit:

THEOREME 3.2. *Soit $P(z) := a_0 + a_2z^2 + a_3z^3$ différent de zéro dans $|z| < 1$ et R un nombre donné dans $(0,1)$. Si $0 < R \leq R_*$ alors*

$$\frac{M_P(r)}{M_P(R)} \geq \begin{cases} \mu(r, c_R(r)) & \text{pour } 0 \leq r < R \\ min\left\{\frac{1+r^2}{1+R^2}, \frac{1+r^3}{1+R^3}\right\} & \text{pour } R \leq r \leq 1. \end{cases} \tag{3.16}$$

Si $R_* = 0.767591879... < R \leq R_+ = 0.879614879...$ alors $(R \leq \lambda(R))$ et

$$\frac{M_P(r)}{M_P(R)} \geq \begin{cases} \mu(r, c_R(r)) & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ \frac{1+r^2}{1+R^2} & \text{si } R \leq r \leq 1 \end{cases} \tag{3.17}$$

Si $R_+ < R \leq 1$ alors ($\lambda(R) < R$) et

$$\frac{M_P(r)}{M_P(R)} \geq \begin{cases} \mu(r, c_R(r)) & \text{si } 0 \leq r < \lambda(R) \\ \frac{1+r^3}{1+R^3} & \text{si } \lambda(R) < r < R \\ \frac{1+r^2}{1+R^2} & \text{si } R \leq r \leq 1. \end{cases} \tag{3.18}$$

Ces estimations sont toutes les meilleures possibles.

Le théorème 3.2 est l'analogue du théorème C pour des polynômes de degré 3 tels que $\lambda = 0$. Nous aurions aimer considérer d'autres valeurs admissibles de $\lambda := \frac{a_1}{na_0}$ mais nous n'avons pas vu la possibilité d'obtenir des résultats précis.

REMARQUE. Soit R_0 (≈ 0.596071637) l'unique racine positive de l'équation $2 - 3R - R^3 = 0$. Faisant référence à (3.16) nous voyons que pour chaque r dans $(R, 1)$,

$$min\left\{\frac{1+r^2}{1+R^2}, \frac{1+r^3}{1+R^3}\right\} = \frac{1+r^2}{1+R^2} \quad \text{si} \quad R_0 \leq R \leq R_*.$$

Comme cas particulier du théorème 3.2 nous avons le

COROLLAIRE 3.3. *Soit $P(z) := a_0 + a_2z^2 + a_3z^3$ différent de zéro dans $|z| < 1$. De plus, pour $0 \leq r < 1$ et $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, soit $\mu_1(r, a) := \frac{1+(1-4a^2)r^2+2ar^3}{2(1-a)(1+2a)}$. Alors*

$$\frac{M_P(r)}{M_P(1)} \geq \begin{cases} \mu_1(r, c_1(r)) & \text{pour } 0 \leq r < \frac{1+\sqrt{13}}{6} \\ \frac{1+r^3}{2} & \text{pour } \frac{1+\sqrt{13}}{6} \leq r < 1. \end{cases}$$

Preuve. Voir (3.18) et remarquer que $\lambda(1) = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

∎

COROLLAIRE 3.4. *Si $P(z) := a_0 + a_2z^2 + a_3z^3$ est différent de zéro dans $|z| < 1$ alors*

$$M_P(R) \leq \left(1 + \frac{R^2}{2}\right)^2 |a_0| \quad \textit{pour} \quad 0 < R \leq 1.$$

Preuve. Remarquons que $a_R(0) = \frac{R}{4}$ et donc

$$\begin{aligned} \mu_R(r.a_R(0)) &= \frac{1}{1+\left(1-\frac{R^2}{4}\right)R^2+\frac{R^4}{2}} \\ &= \frac{1}{1+R^2+\frac{R^4}{4}} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{R^2}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

■

Nous démontrons aussi l'analogue L^2 du corollaire 3.4.:

THEOREME 3.3. *Si $P(z) := a_0 + a_2z^2 + a_3z^3$ est différent de zéro dans $|z| < 1$, alors*

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|P(Re^{i\theta})\right|^2 d\theta\right)^{1/2} \leq \begin{cases} \sqrt{1+R^2}|a_0| & \text{si} \quad R \leq 1 \\ \sqrt{1+R^4}|a_0| & \text{si} \quad R \geq 1. \end{cases} \tag{3.19}$$

Pour chaque R la borne est atteinte.

3.2.2. Un lemme

Pour la preuve du théorème 3.2 nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 3.4. *Soit $P_a(z) := (1 + (a + ib)z)(1 + (a - ib)z)(1 - 2az)$ où $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{1-a^2}$. Alors pour $0 \leq \rho < 1$ et pour tout θ* réel.

$$|P_a(\rho e^{i\theta})| \leq |P_a(-\rho)| = 1 + (1 - 4a^2)\rho^2 + 2a\rho^3.$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} |P_a(\rho e^{i\theta})|^2 &= |(1+a\rho e^{i\theta})^2 + b^2\rho^2 e^{2i\theta}|^2(1 - 4a\rho cos\theta + 4a^2\rho^2) \\ &= |1 + 2a\rho e^{i\theta} + \rho^2 e^{2i\theta}|^2((1 - 4a\rho cos\theta + 4a^2\rho^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |1 + 2a\rho cos\theta + \rho^2 cos2\theta + i(2a\rho sin\theta + \rho^2 sin2\theta)|(1 - 4a\rho cos\theta + 4a^2\rho^2) \\
&= (1 + 4a^2\rho^2 + \rho^4 + 4a\rho cos\theta + 2\rho^2 cos2\theta + 4a\rho^3 cos\theta) \cdot \\
&\quad (1 - 4a\rho cos\theta + 4a^2\rho^2) \\
&= \{1 - 2\rho^2 + 4a^2\rho^2 + \rho^4 + (4a\rho + 4a\rho^3)cos\theta + 4\rho^2 cos^2\theta\} \cdot \\
&\quad (1 - 4a\rho cos\theta + 4a^2\rho^2) \\
&= 1 - 2\rho^2 + 4a^2\rho^2 + \rho^4 + 4a^2\rho^2 - 8a^2\rho^4 + 16a^4\rho^4 + 4a^2\rho^6 \\
&\quad +(8a\rho^3 - 4a\rho^5 + 4a\rho^3 + 16a^3\rho^5)cos\theta \\
&\quad +(-16a^2\rho^2 + 4\rho^2)cos^2\theta - 16a\rho^3 cos^3\theta \\
&= 1 - 2(1 - 4a^2)\rho^2 + (1 - 8a^2 + 16a^4)\rho^4 + 4a^2\rho^6 \\
&\quad +4a\rho^3(3 - \rho^2 + 4a^2\rho^2)cos\theta + 4(1 - 4a^2)\rho^2 cos^2\theta - 16a\rho^3 cos^3\theta.
\end{aligned}
$$

Donc. $|P_a(\rho e^{i\theta})| \leq |P_a(-\rho)|$ si et seulement si

$$4a\rho^3(3 - \rho^2 + 4a^2\rho^2)(1 + cos\theta) - 4(1 - 4a^2)\rho^2(1 - cos^2\theta) - 16a\rho^3(1 + cos^3\theta) \leq 0.$$

i.e. si et seulement si

$$4a\rho^3(3 - \rho^2 + 4a^2\rho^2) - 4(1 - 4a^2)\rho^2(1 - cos\theta) - 16a\rho^3(1 - cos\theta + cos^2\theta) \leq 0.$$

Posons $cos\theta = t$ et définissons

$$A(t) := 4a\rho^3(3 - \rho^2 + 4a^2\rho^2) - 4\rho^2 + 16a^2\rho^2 - 16a\rho^3 + (4\rho^2 - 16a^2\rho^2 + 16a\rho^3)t - 16a\rho^3 t^2.$$

Maintenant $A'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1-4a^2+4a\rho}{8a\rho}$ qui est inadmissible si $\rho < \frac{1-4a^2}{4a}$. Donc pour $\rho < \frac{1-4a^2}{4a}$ nous devons vérifier le signe seulement en $t = 1$:

$$
\begin{aligned}
A(1) &= 4a\rho^3(3 - \rho^2 + 4a^2\rho^2) - 16a\rho^3 \\
&= 4a\rho^3\{-1 - (1 - 4a^2)\rho^2\} \\
&\leq 0.
\end{aligned}
$$

Si $\rho > \frac{1-4a^2}{4a}$ alors le maximum de $A(t)$ est atteint en $t = \frac{1-4a^2+4a\rho}{8a\rho}$ et

$$A\left(\frac{1 - 4a^2 + 4a\rho}{8a\rho}\right) = 4a\rho^3(3 - \rho^2 + 4a^2\rho^2) - 4\rho^2 + 16a^2\rho^2 - 16a\rho^3$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{\rho(1-4a^2+4a\rho)^2}{2a} - \frac{\rho(1-4a^2+4a\rho)^2}{4a} \\
= \; & -4\rho^2\{(1-4a^2)(1+a\rho^3)+a\rho\} + \frac{\rho}{4a}(1-4a^2+4a\rho)^2 \\
= \; & \frac{\rho}{4a}\{-16a\rho((1-4a^2)(1+a\rho^3)+a\rho)+(1-4a^2+4a\rho)^2\} \\
= \; & \frac{\rho}{4a}\{-16a\rho(1-4a^2)-16a^2(1-4a^2)\rho^4+(1-4a^2)^2 \\
& +8a\rho(1-4a^2)\} \\
= \; & \frac{(1-4a^2)\rho}{4a}\{-8a\rho-16a^2\rho^4+(1-4a^2)\} \\
\leq \; & 0
\end{aligned}
$$

puisque $\rho > \frac{1-4a^2}{4a}$.

■

3.2.3. Démonstrations des théorèmes

Démonstration du théorème 3.2. Sans perdre la généralité nous pouvons supposer $P(0) = 1$. Nous devons minimiser

$$\frac{M_P(r)}{M_P(R)} \quad (0 < R \leq 1, \quad 0 \leq r < 1)$$

lorsque P varie dans la classe $\mathcal{F}_3$ des polynômes de la forme

$$\prod_{\nu=1}^{3}(1+\zeta_\nu z), \quad |\zeta_\nu| \leq 1 \quad pour \quad 1 \leq \nu \leq 3, \quad \sum_{\nu=1}^{3}\zeta_\nu = 0.$$

Etape I. Soit $P \in \mathcal{F}_3$. Si $\alpha \in [0, 2\pi)$ est tel que $M_P(R) = |P(Re^{i\alpha})|$ alors pour $0 \leq r < 1$,

$$\frac{M_P(r)}{M_P(R)} = \frac{M_P(r)}{|P(Re^{i\alpha})|} \geq \frac{|P(re^{i\alpha})|}{|P(Re^{i\alpha})|};$$

donc nous chercherons la borne précise pour $\frac{|P(re^{i\alpha})|}{|P(Re^{i\alpha})|}$ lorsque P varie dans la classe $\mathcal{F}_3$ et nous espérons que pour n'importe quel $r \in [0, 1)$ donné le polynôme extrême atteigne son module maximum sur $|z| = r$ au point $re^{i\alpha}$.

Etape II. Soit $P(z) := \prod_{\nu=1}^{3}(1+\zeta_\nu z)$ appartenant à $\mathcal{F}_3$. Si $r \in [0,1)$, $\theta \in [-\pi,\pi)$ sont donnés et $|\zeta_j| < 1, |\zeta_k| < 1$, $1 \le j \le 3$ alors, pour δ positif et petit,

$$\varphi(w) := \frac{(1+(\zeta_j - w)re^{i\theta})(1+(\zeta_k + w)re^{i\theta})}{(1+(\zeta_j - w)Re^{i\theta})(1+(\zeta_k + w)Re^{i\theta})}$$

est une fonction holomorphe de w dans $|w| \le \delta$ et elle est différente de zéro dans ce disque. Donc son module minimum dans $|w| \le \delta$ ne peut pas être atteint en $w = 0$. Ceci signifie que si P_w est obtenu de P en changeant ζ_j en $\zeta_j - w$ et ζ_k en $\zeta_j + w$ alors pour tout $\delta > 0$ petit nous pouvons trouver w de module δ tel que $\left|\frac{P_w(re^{i\theta})}{P_w(Re^{i\theta})}\right|$ sera plus petit que $\left|\frac{P(re^{i\theta})}{P(Re^{i\theta})}\right|$. Ainsi, en recherchant l'infimum de $\left|\frac{P(re^{i\theta})}{P(Re^{i\theta})}\right|$, où $0 < R \le 1$, $0 \le r < 1$, $\theta \in [-\pi,\pi)$ sont donnés et P varie dans la classe $\mathcal{F}_3$, nous pouvons supposer qu'a l'exception de possiblement un zéro *simple* dans $|z| > 1$ le polynôme P a tous ses zéros sur $|z| = 1$. Il s'en suit que nous n'avons qu'a considérer les deux cas suivants:

Cas (i). $|\zeta_1| = |\zeta_2| = |\zeta_3| = 1$;

Cas (ii). $|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1, |\zeta_3| < 1$.

Etape III. Cas (i). En vertu de la condition $\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3 = 0$ le polynôme f doit être de la forme $1 + z^3e^{3i\gamma}$, $\gamma \in [0, 2\pi/3)$. Il n'est pas nécéssaire d'estimer $\left|\frac{P(re^{i\theta})}{P(Re^{i\theta})}\right|$ pour tout $\theta \in [-\pi,\pi)$; il suffit de considérer $\theta = -\gamma$ puisque $P(\rho e^{-i\gamma}) = 1+\rho^3 = M_P(\rho)$. Donc dans ce cas nous avons $\frac{M_P(r)}{M_P(R)} = \frac{1+r^3}{1+R^3}$.

Cas (ii). De nouveau, en vertu de la condition $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0$, le polynôme P doit être de la forme

$$(1+(a+ib)ze^{i\gamma})(1+(a-ib)ze^{i\gamma})(1-2aze^{i\gamma}) \tag{3.20}$$

où $0 \le a \le \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{1-a^2}$, $0 \le \gamma < 2\pi$. Par le lemme 3.4, $M_P(\rho) = |P(-\rho e^{i\theta})|$ pour $0 \le \rho \le 1$. Donc

$$\frac{M_P(r)}{M_P(R)} = \left|\frac{P(-re^{i\theta})}{P(-Re^{i\theta})}\right| = \frac{1+(1-4a^2)r^2+2ar^3}{1+(1-4a^2)R^2+2aR^3} := \mu_R(r,a).$$

Maintenant nous allons minimiser la quantité $\mu_R(r,a)$ par rapport à a. La dérivée partielle de $\mu_R(r,a)$ par rapport à a, qui est égale à

$$\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a) = -(R-r)\cdot\frac{8r^2R^2a^2 - 8(r+R)a + 2(r^2 + rR + R^2 + r^2R^2)}{\{1+(1-4a^2)R^2 + 2aR^3\}^2}.$$

s'annule si et seulement si

$$4r^2R^2a^2 - 4(r+R)a + R^2 + rR + (1+R^2)r^2 = 0,$$

i.e. si et seulement si

$$a = \frac{(r+R) \pm \sqrt{(r+R)^2 - r^2R^2\{R^2 + rR + (1+R^2)r^2\}}}{2r^2R^2}. \tag{3.21}$$

Maintenant remarquons que

$$\frac{r+R+\sqrt{(r+R)^2 - r^2R^2\{R^2 + rR + (1+R^2)r^2\}}}{2r^2R^2} > \frac{1}{2}$$

et donc le signe positif dans (3.21) est inadmissible. En outre,

$$c_R(r) := \frac{r+R-\sqrt{(r+R)^2 - r^2R^2\{R^2 + rR + (1+R^2)r^2\}}}{2r^2R^2} \leq \frac{1}{2}$$

si et seulement si

$$(r+R)^2 - r^2R^2\{R^2 + rR + (1+R^2)r^2\} \geq (r+R-r^2R^2)^2,$$

$$(r+R)^2 - r^2R^2\{R^2 + rR + (1+R^2)r^2\} \geq (r+R)^2 + r^4R^4 - 2r^2R^2(r+R),$$

$$2(r+R) \geq 2r^2R^2 + R^2 + rR + r^2,$$

$$2R - R^2 + (2-R)r - (1+2R^2)r^2 \geq 0,$$

i.e. si et seulement si

$$r \leq \frac{2-R+\sqrt{(2-R)^2 + 4(2-R)R(1+2R^2)}}{2(1+2R^2)} =: \lambda(R).$$

Si $0 < R \leq R_*$, alors par (3.15), $\lambda(R) \geq 1$. Alors $c_R(r) \leq \frac{1}{2}$ pour $0 \leq r \leq 1$ et puisque $\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a)$ a seulement un zéro (simple) au point $a = c_R(r)$ la fonction

$\mu_R(r,a)$ a soit un minimum en $c_R(r)$ soit un maximum en $c_R(r)$. Afin de voir si c'est un minimum ou un maximum nous pouvons vérifier le signe de la dérivée en $a = 0$. Celle-ci est négative si $r < R$ et positive si $r > R$. Cela signifie que $\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a) < 0$ sur $[0, c_R(r))$ si $r < R$ et $\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a) > 0$ sur $[0, c_R(r))$ si $r > R$. Donc $\mu_R(r,a)$ a un minimum en $c_R(r)$ si $r < R$ et un maximum en $c_R(r)$ si $r > R$. Dans le cas $r > R$ nous avons $min \mu_R(r,a) = min\left\{\mu_R(r,0), \mu_R(r,\frac{1}{2})\right\} = min\left\{\frac{1+r^2}{1+R^2}, \frac{1+r^3}{1+R^3}\right\}$. Donc (3.16) est vraie.

Maintenant, soit $R_* < R \leq R_+$. Dans ce cas $R \leq \lambda(R)$. Si $0 \leq r \leq \lambda(R)$ alors $c_R(r) \leq \frac{1}{2}$ et $\mu_R(r,a)$ a ou bien un minimum ou un maximum en $a = c_R(r)$. Remarquons que

$$\left.\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a)\right|_{a=0} \begin{cases} < 0 & \text{si } r < R \\ > 0 & \text{si } R < r < \lambda(R). \end{cases}$$

Cela signifie que si $r < R$ alors $\mu_R(r,a)$ décroît lorsque a croît de 0 à $c_R(r)$; de plus, si $R < r \leq \lambda(R)$ alors $\mu_R(r,a)$ croît lorsque a croît de 0 à $c_R(r)$. Ainsi

$$\mu_R(r,a) \begin{cases} \geq \mu(r, c_R(r)) & \text{si } r < R \\ \geq min\left\{\mu_R(r,0), \mu_R(r,\frac{1}{2})\right\} & \text{si } R < r < \lambda(R). \end{cases}$$

En se référant au lemme 3.3, $min\left\{\mu_R(r,0), \mu_R(r,\frac{1}{2})\right\} = \frac{1+r^2}{1+R^2}$ si $R < r < \lambda(R)$.

Si $\lambda(R) < r < 1$ alors $c_R(r) > \frac{1}{2}$ et $\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a)$ ne change pas de signe pour $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Puisque $\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a)$ est positive en $a = 0$, la fonction $\mu_R(r,a)$ doit être croissante pour $a \in [0, \frac{1}{2}]$ et donc $\mu_R(r,a) \geq \mu_R(r,0) = \frac{1+r^2}{1+R^2}$ si $R < r \leq 1$.

Finalement, soit $R_+ < R \leq 1$. Alors $\lambda(R) < R$. Si $0 \leq r \leq \lambda(R)$ alors $c_R(r) < \frac{1}{2}$ et $\mu_R(r,a)$ a soit un minimum soit un maximum en $c_R(r)$. La dérivée de $\mu_R(r,a)$ étant négative en $a = 0$, la fonction $\mu_R(r,a)$ doit avoir un minimum en $c_R(r)$, i.e. $\mu_R(r,a) \geq \mu_R(r, c_R(r))$ si $0 \leq r \leq \lambda(R)$.

Si $\lambda(R) < r < R$ alors $c_R(r) > \frac{1}{2}$ et $\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a)$ ne change pas de signe pour $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Puisque $\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a)$ est négatif pour $a = 0$, la fonction $\mu_R(r,a)$ décroît lorsque a croît de 0 à $\frac{1}{2}$. Donc $\mu(r,a) \geq \mu_R(r,\frac{1}{2}) = \frac{1+r^3}{1+R^3}$ si $\lambda(R) \leq r < R$.

Si $R < r < 1$, alors $c_R(r) > \frac{1}{2}$ et $\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a)$ ne change pas de signe pour $a \in [0,\frac{1}{2}]$. Mais pour $a = 0$ le signe de $\frac{\partial}{\partial a}\mu_R(r,a)$ est positif et donc $\mu_R(r,a)$ croît pour $a \in [0,\frac{1}{2}]$, i.e. son minimum est atteint en $a = 0$, ce qui signifie que $\mu_R(r,a) \geq \mu_R(r,0) = \frac{1+r^2}{1+R^2}$ dans ce cas.

■

Passons à la

Démonstration du théorème 3.3. Choisissons $\lambda \geq 1$ et $\gamma \in [0,2\pi)$ tel que $P(\lambda e^{i\gamma}z)$ ait un zéro en $z = 1$ et ses deux autres zéros se trouvent dans $|z| \geq 1$. Ecrivons

$$\frac{1}{a_0}P(\lambda e^{i\gamma}z) = (1-z)(1-\zeta_2 z)(1-\zeta_3 z) = 1 + b_2 z^2 + b_3 z^3 \tag{3.22}$$

où $|\zeta_2| \leq 1, |\zeta_3| \leq 1$. Remarquons que $\zeta_2 + \zeta_3 = -1$. Donc nous pouvons supposer que

$$\zeta_2 = -a + ib, \quad \zeta_3 = -1 + a - ib,$$

où $a \in [0,\frac{1}{2}]$. Puisque $|\zeta_3| \leq 1$ nous avons

$$b^2 \leq 2a - a^2. \tag{3.23}$$

De (3.22) il s'en suit que

$$b_2 = \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_2\zeta_3 = -1 + \zeta_2\zeta_3, \quad b_3 = -\zeta_2\zeta_3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|b_2|^2 + |b_3|^2 &= |1 - \zeta_2\zeta_3|^2 + |\zeta_2\zeta_3|^2 \\
&= |1 - (-a+ib)(-1+a-ib)|^2 + |(-a+ib)(-1+a-ib)|^2 \\
&= |1 - \{a(1-a) + b^2 + ib(2a-1)\}|^2 + |a(1-a) + b^2 + ib(2a-1)|^2 \\
&= 1 + a^2(1-a)^2 + b^4 - 2a(1-a) + 2b^2a(1-a) - 2b^2 + b^2(2a-1)^2 \\
&\quad + a^2(1-a)^2 + b^4 + 2b^2a(1-a) + b^2(2a-1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + 2\{a^2 - 2a^3 + a^4 + b^2(b^2 + 2a^2 - 2a + 1)\} - 2a(1-a) - 2b^2 \\
&\leq 1 + 2a^2 - 2a(1-a) \quad \textit{par} \quad (3.23) \\
&= 1 - 2a(1-2a) \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Puisque $|b_2| = \lambda^2 \frac{|a_2|}{|a_0|}$. $|b_3| = \lambda^3 \frac{|a_3|}{|a_0|}$ nous voyons que

$$|a_2|^2 + |a_3|^2 \leq (|b_2|^2 + |b_3|^2)|a_0|^2 \leq |a_0|^2.$$

Maintenant nous remarquons que

$$|a_2|^2 R^4 + |a_3|^2 R^6 \leq \begin{cases} (|a_2|^2 + |a_3|^2)R^4 & \text{si } 0 \leq R \leq 1 \\ (|a_2|^2 + |a_3|^2)R^6 & \text{si } 1 \leq R < \infty \end{cases}$$

et donc

$$|a_0|^2 + |a_2|^2 R^4 + |a_3|^2 R^6 \leq \begin{cases} |a_0|^2(1 + R^4) & \text{si } 0 \leq R \leq 1 \\ |a_0|^2(1 + R^6) & \text{si } 1 \leq R < \infty. \end{cases}$$

Ceci est équivalent à (3.19).

■

CONCLUSION

Nous espérons que les problèmes résolus dans cette thèse indiquent clairement la portée ainsi que les limites des méthodes utilisées. Par exemple, nous pouvons appliquer la méthode de convolution à d'autres problèmes où intervient la norme "sup" mais il n'est pas toujours facile de vérifier que la matrice $M(b_0, b_1, \dots, b_n)$ qui en résulte soit semi-définie positive. A titre d'exemple, supposons que nous voulions déterminer le plus grand nombre positif $c_{\nu,0}(n)$ tel que pour tout $P \in \mathcal{P}_n$,

$$||P^{(\nu)}|| + c_{\nu,0}(n)|a_0| \leq n(n-1)\cdots(n-\nu+1)||P||, \quad \nu \geq 3.$$

Nous pouvons facilement écrire le polynôme Q_α tel que

$$\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}||P^{(\nu)}|| + c_{\nu,0}|a_0| = \sup_{|\alpha|<c_{2,0}(n)} ||Q * P||$$

mais de trouver les valeurs de α telles que $\check{Q} \in \mathcal{B}_n^0$, i.e. de trouver les valeurs de α pour lesquelles la matrice

$$M((n(n-1)\cdots(n-\nu+1), (n-1)(n-2)\cdots(n-\nu), \cdots, 0, \alpha)$$

soit semi-définie positive n'est pas aisé.

En travaillant sur les problèmes étudiés ici, d'autres problèmes sont apparus naturellement. Nous aimerions en mentionner quelques uns.

Le théorème 2.2 peut être utilisé afin de calculer rapidement des valeurs numériques de la constante c_k. Cette constante est la plus petite racine positive de

$$D(2, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-j \text{ zéros}}, x, -2x, x, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-j-2 \text{ zéros}}) = 0$$

pour $j = 0$, i.e. qu'il est suffisant de calculer la racine d'*un* seul polynôme (et non de k + 1). Par exemple, $c_2 = 0.6320\dots$ est la plus petite racine positive du polynôme $64 - 192x^2 + 80x^4 - x^6$. De même $c_3 = 0.5731\dots$, $c_4 = 0.5466\dots$, $c_5 = 0.5324\dots$.

Pouvons nous prétendre que $\lim_{k\to\infty} c_k = 1/2$?

En ce qui concerne le polynôme $p_k(x)$ apparaissant dans le lemme 2.4, il y a évidence empirique qu'il est de la forme $(-1)^{k-1}x^{2[\frac{k}{2}]+1}\cdot q_k(x)$, où $q_k(x)$ est un polynôme de degré pair dont les coefficients sont tous positifs. Si nous pouvions effectivement le vérifier alors cela impliquerait $(-1)^{k-1}p_k(x) \neq 0$, pour tout $x \neq 0$ (et donc pour $0 < x < 2$) ce qui est une étape importante dans la preuve du théorème 2.2.

Afin de démontrer que $\lim_{n\to\infty} c_k(n)$ existe nous avons utilisé le fait que le déterminant $r_{n,k,j}(\alpha,\overline{\alpha})$, comme fonction de $arg(\alpha)$, atteint son minimum pour $arg(\alpha) = 0$ ou $arg(\alpha) = \pi$ (voir (2.14)). Il serait intéressant de vérifier que la valeur minimale est en fait atteinte pour $arg(\alpha) = (k+j+1)\pi$, $n \geq 2k - j + 3$.

Au sujet de l'inégalité apparaissant dans le corollaire 2.1 nous pensons que les inégalités plus fortes

(i) $c_{k+1}(n) < c_k(n)$

(ii) $c_k(n) < c_k(n+1)$

sont vraies. Bien sur, (i) et (ii) impliquent $c_{k+1}(n) \leq c_k(n+1)$, ce qui est notre corollaire 2.1.

Concernant le polynôme $F(n,x)$ apparaissant dans la section 2.3, nous avons essayé de l'exprimer de façon plus compacte. Nous croyons que

$$F(n,x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}(2n-k+1)!\{n^2-(k-1)n+k\}2^{n-k+1}}{(2n-2k+2)!k!}x^k.$$

ce qui n'est toutefois pas démontré dans cette thèse.

La méthode utilisée pour traiter le cas $n = 3$ (voir section 3.2) devient beaucoup plus compliquée, même pour $n = 5$. Notre raisonnement devra être modifié et de nouvelles idées seront nécessaires afin de résoudre le problème pour des valeurs de n impairs arbitraires.

La solution dans le cas $n = 3$ suggère (voir corollaire 3.3) que le polynôme extrémal dépend de r, même lorsque R est égal à 1 et qu'il ne prenne pas une forme simple. Nous ne pouvons même pas faire de conjecture quant à la borne pour $M_P(r)/M_P(1)$ lorsque n est impair et ≥ 5.

REFERENCES

1. BERNSTEIN S.N. (1926). Leçons sur les propiétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Gauthier-Villars. Paris. Reimprimé dans la première partie de: "*L'approximation*" par S.N. Bernstein et C. De La Vallée Poussin. publié par Chelsea. New York. 1970.

2. CORPUT. J.G.. van der et VISSER. C. (1946). Inequalities concerning polynomials and trigonometric polynomials. Neder. Akad. Wetensch. Proc.. 49. 238-247.

3. EGERVÁRY. E.V. et SZÁSZ. O. (1928). Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome. Math. Z.. 27. 641-652.

4. FRAPPIER. C. et QAZI. M.A. (1996). Asymptotic Inequalities Related to the Maximum Modulus of a Polynomial. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 15. (2). 1-12.

5. FRAPPIER. C. et QAZI. M.A. (1996). Aymptotic Inequalities for Polynomials with Restricted Coefficients. Analysis. 16. 223-243.

6. FRAPPIER. C. et QAZI. M.A. (1994). Optimal inequalities for the Coefficients of Polynomials of Small Degree. Annales UMCS. Vol. XLVII. 2. Sectio A.

7. FRAPPIER. C. (1988). Inequalities for Polynomials with Restricted Coefficients. Journal d'Analyse Mathématique. 50. 143-157.

8. FRAPPIER. C.. RAHMAN. Q.I. et RUSCHEWEYH. S. (1985). New inequalities for polynomials. Trans. Amer. Math. Soc.. 288 (1). 69-99.

9. FRAPPIER. C.. RAHMAN. Q.I. et RUSCHEWEYH. S. (1985). Inequalities for polynomials with two equal coefficients. J. of Approx. Theory. 44 (1). 73-81.

10. GANTMACHER, F.R. (1959). The Theory of Matrices. Chelsea, New York, 1959.

11. GOVIL, N. K. (1985). On the maximum modulus of polynomials. J. Math. Anal. Appl., 112, 235-258.

12. GRAGG, W.B. (1972). The Pade Table and its relation to certain algorithms of Numerical Analysis. SIAM Review, 14, 1-62.

13. HOLLAND, F. (1973). Some extremal problems for polynomials with positive real part. Bull. London Math. Soc., 5, 54-58.

14 NEHARI, Z. (1952). Conformal Mapping. McGraw-Hill, New York.

15. QAZI, M.A. (1992). On the Maximum Modulus of Polynomials. Proc. Amer. Math. Soc., 115, 337-343.

16. RAHMAN, Q.I. et STANKIEWICZ, J., (1974). Differential inequalities and local valency. Pacific J. Math., 54, 165-181.

17. RIESZ, M. (1916). Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein. Acta Math., 40, 337-347.

18. RIVLIN, T.J. (1960). On the maximum modulus of polynomials. Amer. Math. Monthly, 67, 251-253.

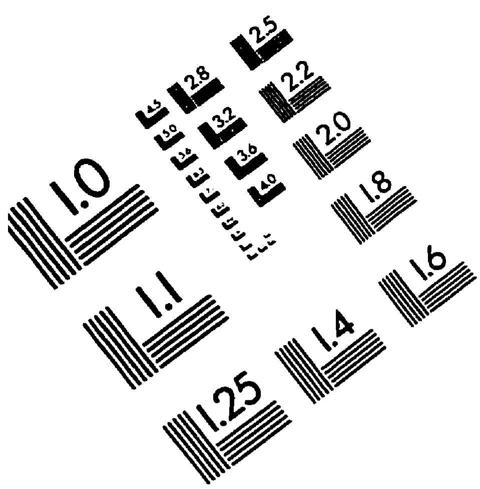
19. RUSCHEWEYH, S. (1982). Convolutions in geometric function theory. Sém. Math. Supérieures, Presses Univ. Montréal.

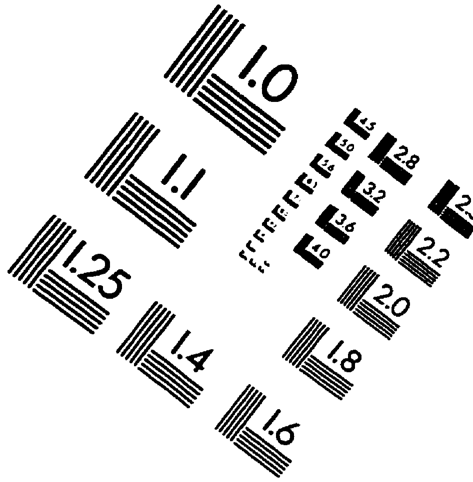
20. VISSER, C. (1945). A simple proof of certain inequalities concerning polynomials. Neder. Akad. Wetensch. Proc., 47, 276-281.

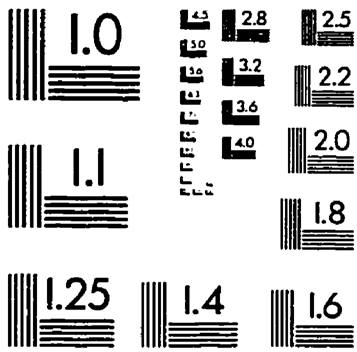
21. WALSH, J.L. (1964). The location of the zeros of the derivative of a rational function, revisited. J. Math. Pures Appl., 43, 353-370.

22. WALSH, J.L. (1964). A theorem of Grace on the zeros of polynomials, revisited. Proc. Amer. Math. Soc., 15, 354-360.

IMAGE EVALUATION
TEST TARGET (QA-3)

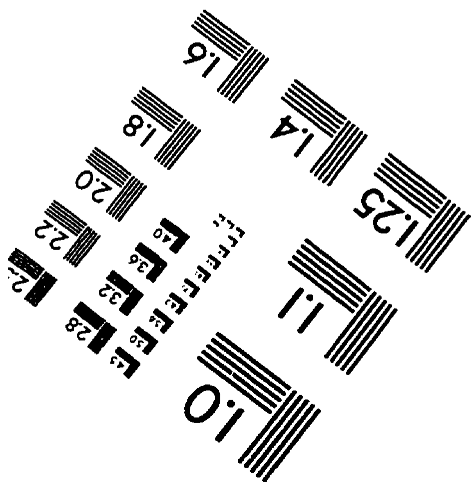


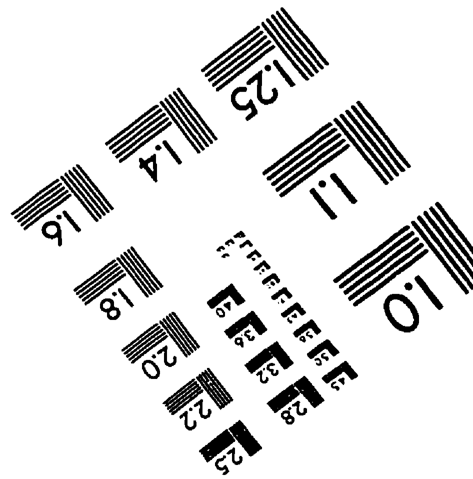




150mm

6″





APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989